В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов

МГУ – ШКОЛЕ

Геометрия

9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ФГОС

МГУ - ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов

Геометрия

9 класс

Учебник
для общеобразовательных
учреждений

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Под редакцией В. А. Садовничего

Москва
«Просвещение»

Введение

Дорогие девятиклассники!

В 7 и 8 классах вы изучали свойства геометрических фигур на плоскости. При этом использовались различные приёмы и методы в доказательствах теорем и решениях задач.

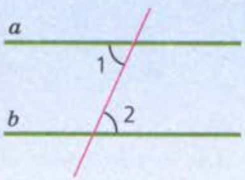
Значительная часть курса геометрии в 9 классе будет посвящена ещё одному очень важному и эффективному методу исследования свойств геометрических фигур — векторно-координатному методу. Кроме того, из учебника 9 класса вы узнаете о том, как измеряются и вычисляются площади геометрических фигур, и получите возможность приоткрыть дверь в стереометрию — это та часть геометрии, в которой изучаются геометрические фигуры в пространстве; более основательно стереометрией вы будете заниматься на уроках геометрии в старших классах. А в 9 классе мы будем опираться на то, что вы узнали и чему научились в 7 и 8 классах. Поэтому напомним основные определения и утверждения, с которыми вы познакомились в 8 классе.

В четвёртой главе (с неё начинается учебник геометрии 8 класса) рассматривались признаки и свойства параллельных прямых. Была доказана теорема, выражающая признак параллельности двух прямых:

- **если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны** (рис. 1).

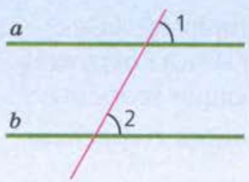
Из этой теоремы выведены следствия, дающие ещё два признака параллельности прямых:

- **если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то эти прямые параллельны** (рис. 2);
- **если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то эти прямые параллельны** (рис. 3).



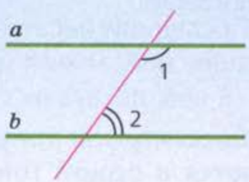
Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$

Рис. 1



Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$

Рис. 2



Если $\angle 1 + \angle 2 = 180$, то $a \parallel b$

Рис. 3

Затем была доказана основная теорема о параллельных прямых:

- **через точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.**

Из этой теоремы выведены два следствия:

- **если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую;**
- **если две прямые параллельны третьей, то они параллельны.**

С помощью основной теоремы о параллельных прямых была доказана теорема о свойстве параллельных прямых, которая является обратной по отношению к теореме о признаке параллельности двух прямых, связанном с накрест лежащими углами:

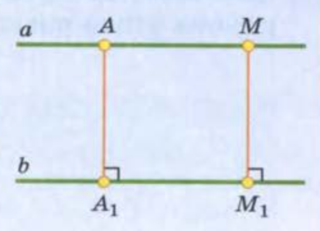
- **если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.**

Из этой теоремы выведены четыре следствия:

- **если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны;**
- **если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°;**
- **если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямой;**
- **все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой** (рис. 4).

С помощью последнего следствия доказано утверждение:

- **множество всех точек плоскости, расположенных по одну сторону от данной прямой и равноудалённых от неё, есть прямая, параллельная данной.**



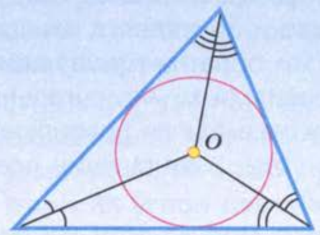
Если $a \parallel b$, то $MM_1 = AA_1$. AA_1 — расстояние между параллельными прямыми a и b

Рис. 4

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой мы назвали расстоянием между этими прямыми.

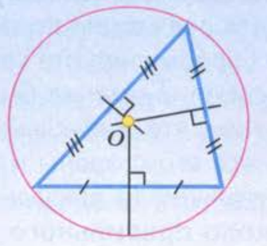
Последний параграф четвёртой главы посвящён вписанным и описанным окружностям. В нём доказаны следующие теоремы:

- **биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;**
- **в любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну** (доказательство этой теоремы опирается



Точка O — центр вписанной окружности

Рис. 5



Точка O — центр описанной окружности

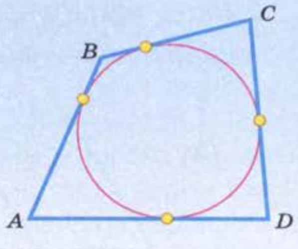
Рис. 6

на предыдущую теорему, поскольку центром вписанной в треугольник окружности является точка пересечения его биссектрис, рис. 5);

- **серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке;**
- **около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну** (доказательство этой теоремы опирается на предыдущую теорему, поскольку центром описанной около треугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам, рис. 6).

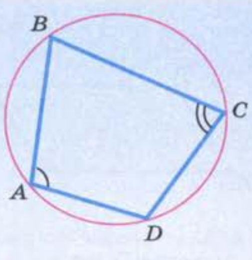
В пятой главе рассматривались многоугольники, причём наибольшее внимание было уделено четырёхугольникам. Были доказаны утверждения:

- **сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$;**
- **в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны** (рис. 7);
- **в любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°** (рис. 8).



$AB + CD = BC + AD$

Рис. 7



$\angle A + \angle C = 180°$

Рис. 8

Для двух последних утверждений справедливы обратные утверждения, выражающие признаки описанного и вписанного четырёхугольников (сформулируйте самостоятельно эти обратные утверждения).

Особое внимание было уделено правильным многоугольникам. Напомним, что выпуклый многоугольник называется правильным, если равны все его стороны и равны все его углы. В отношении правильных многоугольников доказаны две теоремы:

- **около правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну;**
- **в правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.**

Центр описанной около правильного многоугольника окружности совпадает с центром вписанной в него окружности. Эта точка называется центром правильного многоугольника.

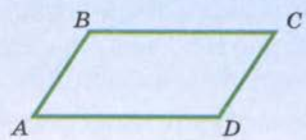
Отдельный параграф пятой главы посвящён специальным видам четырёхугольников: параллелограмму и трапеции.

Напомним, что параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны (рис. 9). Сначала было доказано, что

- **параллелограмм — выпуклый четырёхугольник,**

а затем были доказаны теоремы о свойствах и признаках параллелограмма:

- **в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны** (рис. 10);
- **диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам** (рис. 11);
- **если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм;**
- **если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм;**



$ABCD$ — параллелограмм: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$

Рис. 9

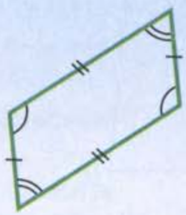


Рис. 10

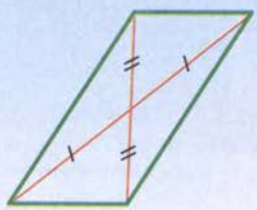


Рис. 11

- **если диагонали четырёхугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.**

Прямоугольник (так называется четырёхугольник, у которого все углы прямые) является частным случаем параллелограмма. Были доказаны две теоремы о признаках прямоугольника:

- **если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник;**
- **если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.**

Для последнего утверждения справедливо обратное (свойство прямоугольника):

- **диагонали прямоугольника равны** (рис. 12).

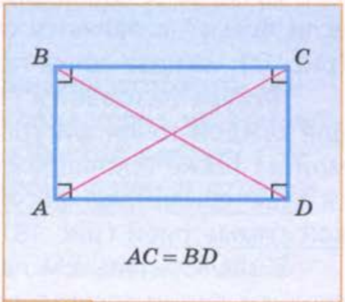


Рис. 12

Другим частным случаем параллелограмма является ромб — это параллелограмм, все стороны которого равны.

Сначала было доказано утверждение об особом свойстве ромба:

- **диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам** (рис. 13),

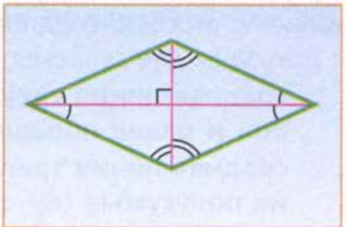


Рис. 13

а затем доказаны две теоремы о признаках ромба:

- **если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб;**
- **если диагональ параллелограмма делит его угол пополам, то этот параллелограмм — ромб.**

Ещё один вид четырёхугольников, рассмотренных в этом параграфе, — трапеция (рис. 14). Так называется четырёхугольник, две стороны которого параллельны (они называются основаниями трапеции), а две другие стороны не параллельны (они называются боковыми сторонами трапеции).

Рис. 14

В этом же параграфе были введены понятия, связанные с симметрией относительно точки и симметрией относительно прямой. Напомним эти понятия.

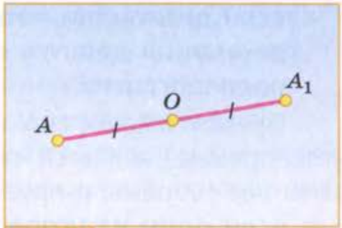


Рис. 15

Точки A и A_1 называются <u>симметричными относительно точки</u> O, если точка O — середина отрезка AA_1 (рис. 15); точка O считается симметричной самой себе.

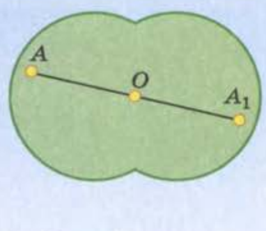
Фигура называется <u>симметричной относительно точки</u> O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка (относительно точки O) также принадлежит этой фигуре. При этом точка O <u>называется центром симметрии</u> фигуры, а о фигуре говорят, что она <u>обладает центральной симметрией</u> (рис. 16).

Точки A и A_1 называются <u>симметричными относительно прямой</u> a, если прямая a является серединным перпендикуляром к отрезку AA_1 (рис. 17); каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.

Фигура называется <u>симметричной относительно прямой</u> a, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка (относительно прямой a) также принадлежит этой фигуре. При этом прямая a называется <u>осью симметрии фигуры</u>, а о фигуре говорят, что она <u>обладает осевой симметрией</u> (рис. 18).

В заключительном параграфе пятой главы были даны определения <u>средней линии треугольника</u> (так называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон, рис. 19) и <u>средней линии трапеции</u> (так называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон, рис. 20) и доказаны две теоремы:

- **средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны** (см. рис. 19);
- **средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме** (см. рис. 20).



Точка O — центр симметрии фигуры

Рис. 16

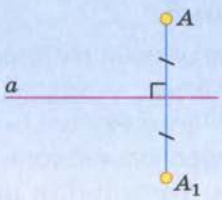
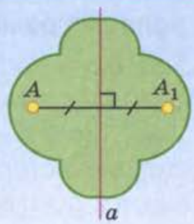
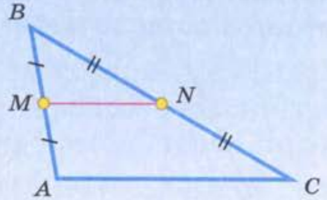


Рис. 17



Прямая a — ось симметрии фигуры

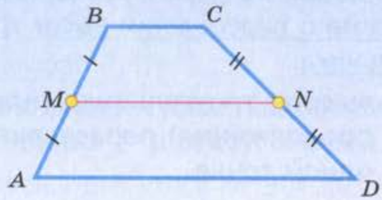
Рис. 18



MN — средняя линия треугольника ABC:

$MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$

Рис. 19



MN — средняя линия трапеции $ABCD$:

$MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$

и $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$

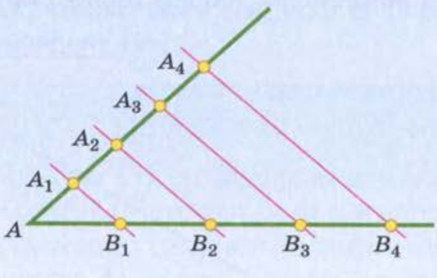
Рис. 20

Затем была доказана теорема Фалеса:

- **если на одной из сторон угла от его вершины отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то они отсекут на второй стороне равные отрезки** (рис. 21).

С помощью теоремы Фалеса была доказана теорема о пересечении медиан треугольника:

- **медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины** (рис. 22).

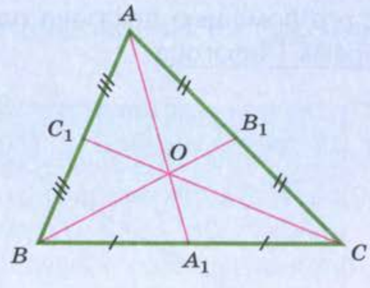


Если $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$

и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$,

то $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$

Рис. 21



$AO : OA_1 = BO : OB_1 =$

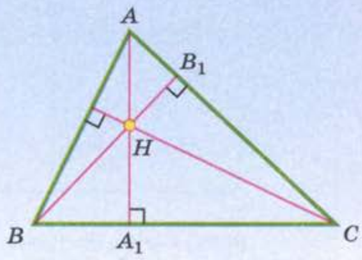
$= CO : OC_1 = 2 : 1$

Рис. 22

В этом же параграфе доказана теорема о пересечении высот треугольника:

- **высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.**

Точка пересечения высот треугольника (или их продолжений) называется ортоцентром треугольника (рис. 23).



Точка H — ортоцентр треугольника ABC

Рис. 23

Шестая глава посвящена решению треугольников. В ней сначала были даны определения косинуса и синуса острого угла прямоугольного треугольника: косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, прилежащего к этому углу, к гипотенузе, а синусом — отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе (рис. 24). Затем было доказано, что

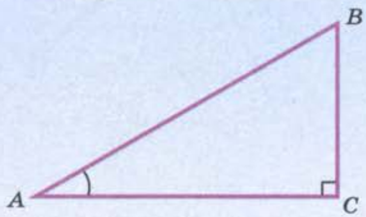
- **если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то косинусы этих углов равны и синусы этих углов равны.**

Это позволяет говорить кратко: «косинус острого угла» и «синус острого угла», не указывая при этом, о каком именно прямоугольном треугольнике и его остром угле идёт речь.

Далее было выведено основное тригонометрическое тождество:

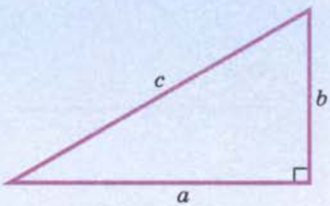
$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1,$$

и с его помощью доказана одна из важнейших теорем геометрии — теорема Пифагора:



$\cos A = \frac{AC}{AB}$; $\sin A = \frac{BC}{AB}$

Рис. 24



$c^2 = a^2 + b^2$

Рис. 25

- **в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов** (рис. 25),

а затем теорема, обратная теореме Пифагора:

- **если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник — прямоугольный.**

Далее синус и косинус были определены для углов от 90° до 180°. В основе этого определения лежат формулы

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad (1)$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1. \qquad (2)$$

Для углов α из промежутка $0° < \alpha < 90°$ справедливость равенств (1) и (2) была доказана, а для любого угла α из промежутка $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ формулы (1) и (2) принимаются в качестве определения синуса и косинуса этого угла, т. е.

- **синусом угла α из промежутка $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ называется число $2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$;**
- **косинусом угла α из промежутка $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ называется число $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$.**

Кроме того, мы полагаем по определению, что $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$.

Из наших определений следует, что основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ справедливо для любого α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Напомним также следующие формулы (они называются формулами приведения):

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha, \qquad (3)$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (4)$$

Формулы (3) справедливы для любого α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$, а формулы (4) — для любого α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

С помощью синуса и косинуса мы определили ещё две тригонометрические функции — тангенс и котангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (0° \leqslant \alpha \leqslant 180°,\ \alpha \neq 90°),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (0° < \alpha < 180°).$$

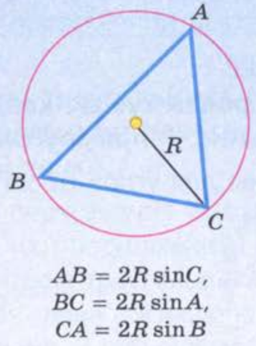


Рис. 26

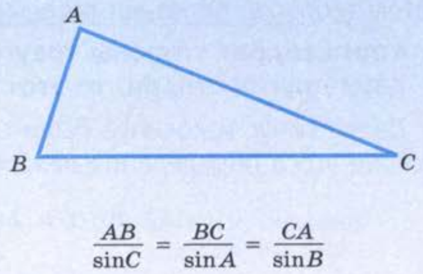


Рис. 27

Центральное место в шестой главе занимают теоремы синусов и косинусов. Предварительно была доказана теорема:

- **сторона треугольника равна произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего угла** (рис. 26).

Из этой теоремы непосредственно следует теорема синусов:

- **стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов** (рис. 27).

Теорема косинусов:

- **квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон, умноженное на косинус угла между ними** (рис. 28).

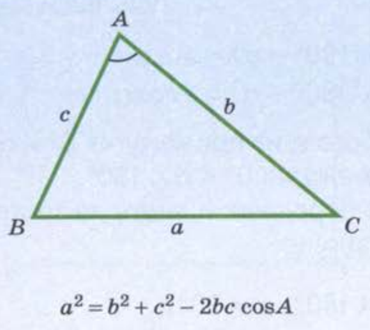


Рис. 28

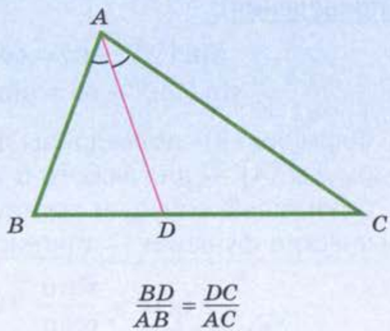


Рис. 29

Из теоремы косинусов выведено следствие:

- **если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы.**

С помощью теоремы синусов была доказана теорема о биссектрисе треугольника:

- **биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам** (рис. 29).

Последний параграф шестой главы посвящён важной теме — подобию треугольников.

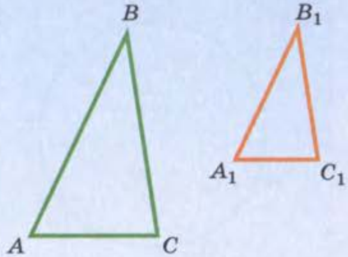
Напомним определение подобных треугольников: два треугольника называются подобными, если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника (рис. 30).

Сначала была доказана теорема об углах подобных треугольников:

- **если два треугольника подобны, то углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника,**

а затем — две теоремы о признаках подобия треугольников:

- **если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны** (первый признак, рис. 31);
- **если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны** (второй признак, рис. 32).

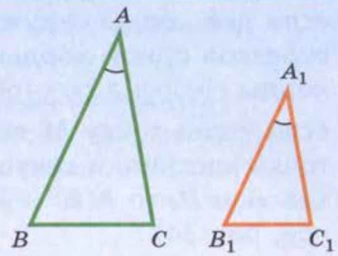


$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = k,$$

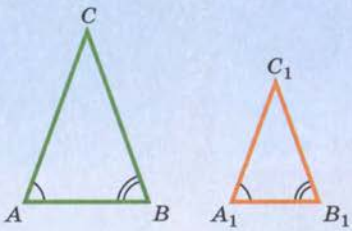
k — коэффициент подобия

Рис. 30



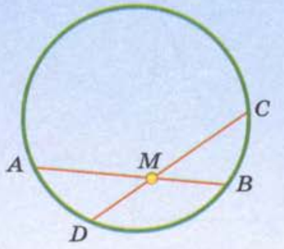
Если $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$ и $\angle A_1 = A$,
то $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$

Рис. 31



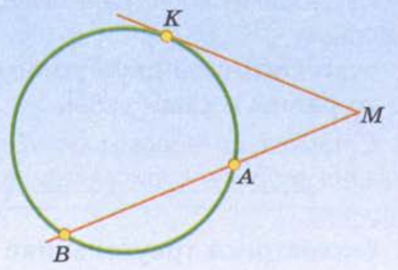
Если $\angle A_1 = \angle A$ и $\angle B_1 = \angle B$,
то $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$

Рис. 32



$AM \cdot BM = CM \cdot DM$

Рис. 33



$MK^2 = MA \cdot MB$

Рис. 34

С помощью второго признака подобия треугольников были доказаны две теоремы:

- **если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды** (теорема об отрезках пересекающихся хорд, рис. 33);
- **если через точку M проведены касательная MK, где K — точка касания, и секущая, пересекающая окружность в точках A и B, то $MK^2 = MA \cdot MB$** (теорема о квадрате касательной, рис. 34).

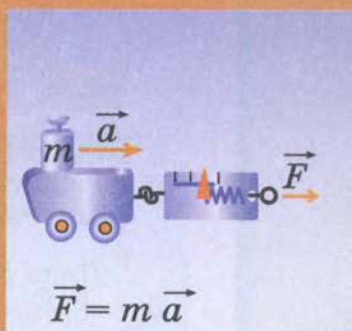
Всё, что мы изучили в 7 и 8 классах, понадобится нам для дальнейшего изучения свойств геометрических фигур на плоскости и в пространстве.

Глава 7

Векторы и координаты

Эта глава посвящена векторно-координатному методу в геометрии, т. е. использованию векторов и координат. С понятием декартовой прямоугольной системы координат вы знакомы по курсу алгебры. Введение системы координат позволяет описывать геометрические фигуры, в частности окружности и прямые, с помощью уравнений, что даёт возможность применять в геометрии алгебраические методы. Так, например, написав уравнения двух данных прямых, можно по виду этих уравнений установить, пересекаются эти прямые или нет.

Изучение векторов и операций с ними полезно не только потому, что с их помощью можно решать геометрические задачи, но ещё и потому, что векторы широко используются в физике для описания различных физических величин, таких, как скорость, ускорение, сила и др.



§ 19 Координаты точки и координаты вектора

84 Ось координат

Рассмотрим произвольную прямую l и отметим на ней какую-нибудь точку O (рис. 35, *а*). Точка O разделяет прямую l на два луча. Выберем один из них и назовём его положительной полуосью (на рисунке 35, *а* она отмечена стрелкой), а другой луч — отрицательной полуосью. Если, кроме того, выбрана единица измерения отрезков, то прямая l с выбранной положительной полуосью называется осью координат. Точка O называется началом координат. Ось координат с началом O обычно обозначают так: Ox.

Координатой точки M, лежащей на оси координат Ox и отличной от точки O, называется длина[1] отрезка OM, взятая со знаком плюс, если точка M лежит на положительной полуоси (рис. 35, *б*), и со знаком минус — в противном случае (рис. 35, *в*); координатой точки O считается число 0. Тот факт, что точка M имеет координату x, условимся обозначать так: $M(x)$.

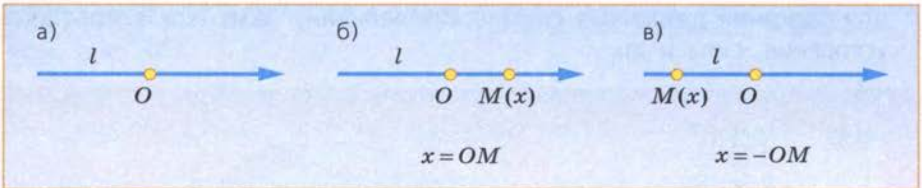


Рис. 35

Докажем, что

- **координата середины отрезка, лежащего на оси координат, равна полусумме координат концов этого отрезка.**

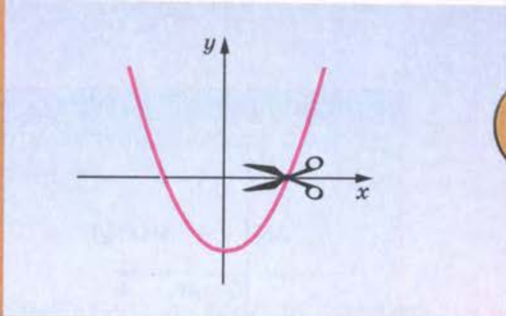
Пусть $M(x)$ — середина отрезка с концами $A(x_1)$ и $B(x_2)$. Для определённости будем считать, что $x_1 < x_2$ (рис. 36).

Поскольку длина отрезка AM равна $x - x_1$, а длина отрезка MB равна $x_2 - x$, то

$$x - x_1 = x_2 - x,$$

[1] При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом. Здесь и далее под длиной отрезка мы будем понимать это число.

Координата — от латинских **co** (с, вместе) и **ordinatus** (упорядоченный).



Абсцисса — от латинского **abscissus** (отрезанный, отделённый). Ордината — от латинского **ordinatus** (упорядоченный, расставленный в определённом порядке).

откуда находим:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

что и требовалось доказать.

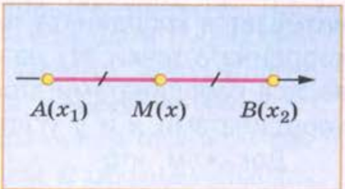


Рис. 36

Замечание. В дальнейшем мы будем рассматривать и такие «отрезки», концы которых совпадают, т. е. отрезок состоит из одной точки. Серединой такого «отрезка» назовём саму эту точку. В этом случае $x = x_1 = x_2$, поэтому полученная формула остаётся верной.

85 Прямоугольная система координат

Если проведены две взаимно перпендикулярные оси координат Ox и Oy с общим началом O (рис. 37) и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что задана прямоугольная система координат. Оси Ox и Oy называются соответственно осью абсцисс и осью ординат, а точка O — началом координат. Система координат обозначается так: Oxy.

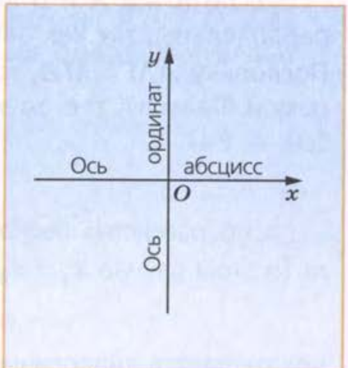


Рис. 37

Пусть M — произвольная точка. Проведём через неё прямые, перпендикулярные к осям координат и пересекающие оси Ox

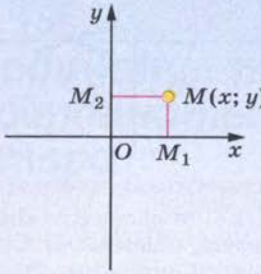


Рис. 38

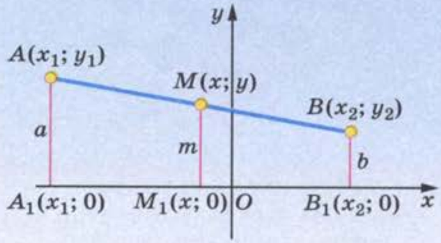


Рис. 39

и Oy в точках M_1 и M_2 соответственно (рис. 38). Абсциссой точки M называется координата точки M_1 на оси Ox, а ординатой точки M — координата точки M_2 на оси Oy. Абсцисса и ордината точки M называются координатами этой точки в системе координат Oxy. Точку M с координатами x и y условимся обозначать так: $M\,(x;\ y)$.

Докажем, что

- **каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат концов этого отрезка.**

Пусть $M\,(x;\ y)$ — середина отрезка с концами $A\,(x_1;\ y_1)$ и $B\,(x_2;\ y_2)$ (рис. 39). Требуется доказать, что $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ и $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Проведём через точки A, B и M прямые a, b и m, перпендикулярные к оси Ox и пересекающие её соответственно в точках $A_1\,(x_1;\ 0)$, $B_1\,(x_2;\ 0)$ и $M_1\,(x;\ 0)$.

Если точки A и B не лежат на прямой m, то прямые a, b и m параллельны, так как они перпендикулярны к одной и той же прямой. Поскольку $AM = MB$, то $A_1M_1 = M_1B_1$ (докажите это, пользуясь теоремой Фалеса), т. е. точка M_1 — середина отрезка A_1B_1. Поэтому (см. п. 84)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Это равенство верно и тогда, когда точки A и B лежат на прямой m (в этом случае $x_1 = x_2 = x$). Справедливость равенства

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

доказывается аналогично.

Прямоугольную систему координат называют также декартовой системой координат в честь Рене Декарта, использовавшего метод координат для решения геометрических задач.

86 Вектор

Некоторые физические величины, например сила и скорость, задаются не только своим числовым значением (при выбранной единице измерения), но и направлением в пространстве. Такие физические величины называют векторными величинами или коротко — векторами.

В геометрии векторы определяются следующим образом. Рассмотрим отрезок AB. На нём можно указать два направления: от A к B и от B к A (рис. 40). Чтобы выбрать одно из них, поступим так: одну из точек, A или B, назовём началом, другую — концом и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу. Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется вектором. На рисунках вектор изображается отрезком со стрелкой на конце. Вектор с началом A и концом B обозначается так: $\overrightarrow{AB}$ (рис. 41).

Ясно, что с каждым отрезком AB, концы которого не совпадают, связаны два вектора: $\overrightarrow{AB}$ (A — начало, B — конец) и $\overrightarrow{BA}$ (B — начало, A — конец). Говорят, что вектор $\overrightarrow{BA}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$, и пишут: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Если же концы отрезка совпадают, т. е. отрезок состоит из одной точки, то соответствующий этому отрезку вектор называется нулевым. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается сам этот вектор.

На рисунке 42, *а* изображены ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ (точки A, C, E — их начала, точки B, D, F — их концы) и нулевой

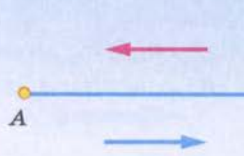


Рис. 40

Рис. 41

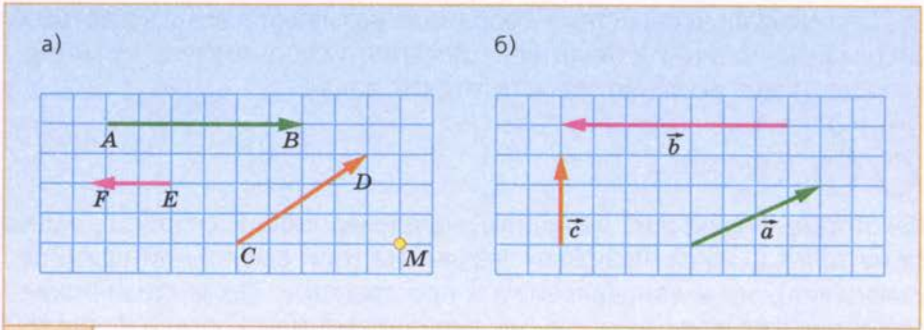


Рис. 42

вектор $\overrightarrow{MM}$. Иногда векторы обозначают одной малой латинской буквой со стрелкой над ней: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 42, *б*), а нулевой вектор — символом $\vec{0}$.

<u>Длиной</u> или <u>модулем</u> ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB; длина нулевого вектора считается равной нулю. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$.

На рисунке 42 $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{CD}| = 5$, $|\overrightarrow{EF}| = 2{,}5$, $|\overrightarrow{MM}| = 0$, $|\vec{a}| = 2\sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 7$, $|\vec{c}| = 3$ (каждая клетка на рисунке имеет сторону, равную единице измерения отрезков).

В курсе физики векторы называются равными, если их длины равны и они одинаково направлены. Это определение, при всей своей наглядности, обладает тем недостатком, что им трудно пользоваться при доказательстве утверждений о равных векторах. Поэтому мы будем исходить из другого определения, приводящего, впрочем, к тем же выводам.

Определение

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются равными, если середины отрезков AD и BC совпадают.

Обсудим это определение.

Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ нулевые, то точка A совпадает с точкой B, а точка C — с точкой D, поэтому отрезки AD и BC совпадают, а значит, совпадают их середины. Следовательно,

- **все нулевые векторы равны друг другу.**

Пусть теперь вектор $\overrightarrow{AB}$ ненулевой и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Обозначим общую середину отрезков AD и BC буквой O. Возможны два случая.

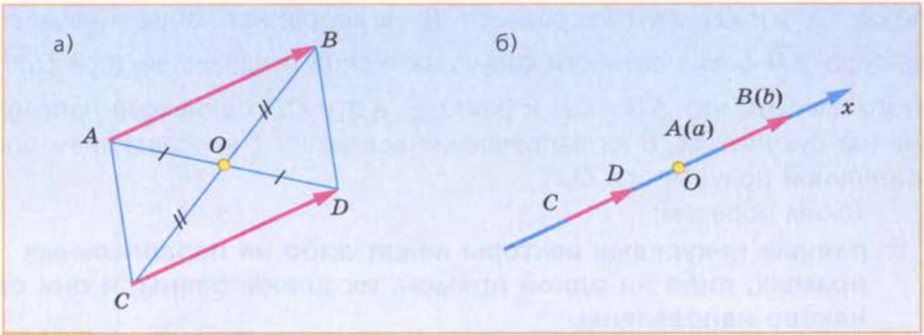
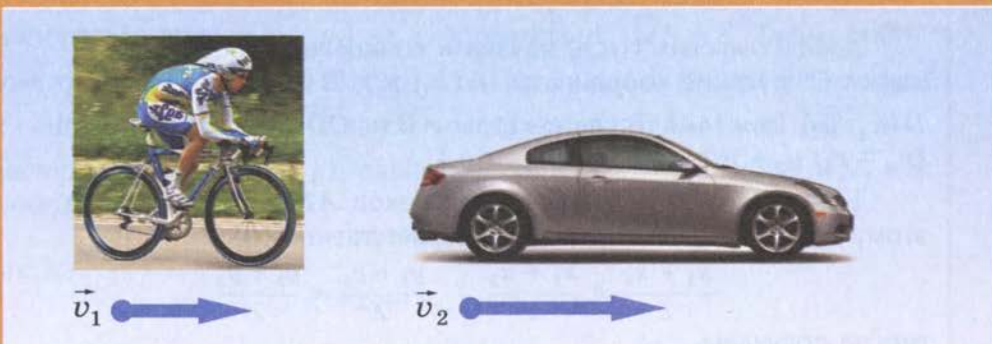


Рис. 43

1 Точка O не лежит на прямой AB. В этом случае пересекающиеся в точке O отрезки AD и BC являются диагоналями четырёхугольника $ABDC$ (рис. 43, *а*). Так как точкой пересечения они делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм. Следовательно, $AB \parallel CD$, $AB = CD$ и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ одинаково направлены — их концы B и D лежат по одну сторону от прямой AC, проходящей через начала этих векторов.

2 Точка O лежит на прямой AB. В этом случае точки C и D также лежат на прямой AB. Введём ось координат Ox так, чтобы точки A, B, C и D лежали на этой оси. Пусть координата точки A на оси Ox равна a, а координата точки B равна b (рис. 43, *б*). Так как точка $O(0)$ — середина отрезков AD и BC, то координата точки D равна $-a$, а координата точки C равна $-b$ (п. 84). Мы видим, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$



Вектор — от латинского vector (везущий, несущий).

лежат на оси Ox, причём разность $b - a$ координат конца и начала вектора $\overrightarrow{AB}$ равна разности координат конца и начала вектора $\overrightarrow{CD}$. Из этого следует, что $AB = CD$ и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ одинаково направлены (на рисунке 43, *б* их направление совпадает с направлением положительной полуоси оси Ox).

Таким образом,

- **равные ненулевые векторы лежат либо на параллельных прямых, либо на одной прямой, их длины равны, и они одинаково направлены.**

87 Координаты вектора

Координатами вектора в прямоугольной системе координат называются числа, равные разностям соответствующих координат его конца и начала. Координаты x и y вектора $\vec{a}$ записывают в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a}\,\{x; y\}$; при этом говорят, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x, y\}$. Таким образом, если точки $A\,(x_1; y_1)$ и $B\,(x_2, y_2)$ — начало и конец вектора, то вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Докажем теорему о координатах равных векторов.

ТЕОРЕМА

Координаты равных векторов соответственно равны; обратно, если координаты векторов соответственно равны, то эти векторы равны.

Доказательство. Пусть начала и концы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют следующие координаты: $A\,(x_1; y_1)$, $B\,(x_2; y_2)$, $C\,(x_3; y_3)$, $D\,(x_4; y_4)$ (рис. 44). Тогда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ и $\{x_4 - x_3; y_4 - y_3\}$.

Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то середины отрезков AD и BC совпадают, поэтому координаты этих середин соответственно равны:

$$\frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2}, \qquad \frac{y_1 + y_4}{2} = \frac{y_2 + y_3}{2}, \tag{1}$$

откуда получаем

$$x_2 - x_1 = x_4 - x_3, \qquad y_2 - y_1 = y_4 - y_3, \tag{2}$$

т. е. координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ соответственно равны.

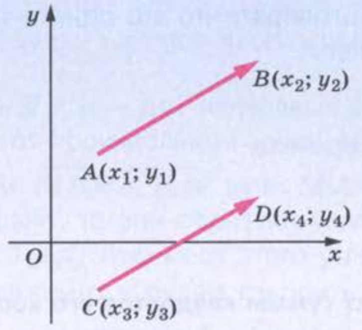


Рис. 44

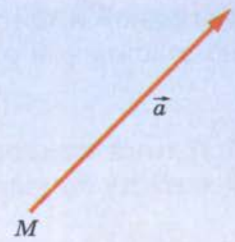


Рис. 45

Обратно, если координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ соответственно равны, т. е. выполнены равенства (2), то выполняются и равенства (1), и, следовательно, середины отрезков AD и BC совпадают. Это означает, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Теорема доказана.

Если точка M — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что <u>вектор $\vec{a}$ отложен от точки M</u> (рис. 45). Докажем, что

- **от любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.**

Пусть $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ — данный вектор, $M(x_2;\ y_2)$ — данная точка. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{MN}$ с концом $N(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$. Координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ равны $\{x_1;\ y_1\}$, и, следовательно, $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$. Таким образом, от точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$.

Докажем теперь, что такой вектор только один. Пусть $\overrightarrow{MN_1}$ — вектор с концом $N_1(x;\ y)$, равный вектору $\vec{a}$. Из равенства $\overrightarrow{MN_1} = \vec{a}$ следует, что

$$x - x_2 = x_1,\ y - y_2 = y_1,$$

откуда

$$x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2,$$

и, следовательно, точка N_1 совпадает с точкой N. Итак, от точки M можно отложить только один вектор, равный вектору $\vec{a}$.

Замечание. Равные векторы, отложенные от разных точек, иногда обозначают одной и той же буквой и говорят, что это один и тот же вектор, но отложенный от разных точек.

88 Длина вектора и расстояние между двумя точками

ТЕОРЕМА

Длина вектора равна корню из суммы квадратов его координат.

Доказательство. Пусть $\vec{a}\{x;\ y\}$ — данный вектор. Докажем, что

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 46). Поскольку координаты точки O равны (0; 0), то координаты точки A равны $(x;\ y)$.

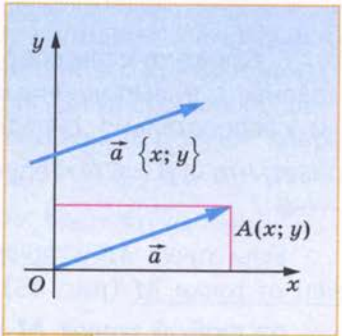


Рис. 46

Если точка A не лежит ни на одной из осей координат, то отрезок OA является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $|x|$ и $|y|$, поэтому

$$OA = |\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (3)$$

Эта формула верна и в том случае, когда точка A лежит на оси координат (объясните почему). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ

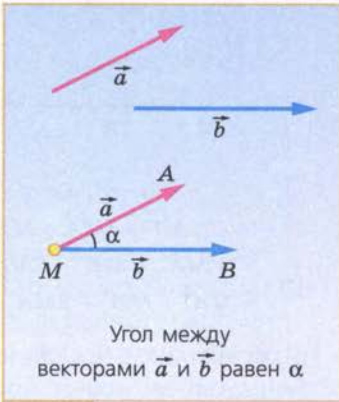
Расстояние между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ выражается формулой

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (4)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что расстояние между точками A и B равно длине вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$, и воспользоваться формулой (3).

89 Угол между векторами

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два ненулевых вектора. Отложим от произвольной точки M векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$. Если лучи MA и MB не совпадают, то они образуют угол AMB (рис. 47). Градусную меру этого угла обозначим буквой α и будем говорить, что <u>угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α.</u> Если же лучи MA и MB совпадают, то будем считать, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 0°.



Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α

Рис. 47

ТЕОРЕМА

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \qquad (5)$$

Доказательство. Отложим от произвольной точки $M(x_0; y_0)$ векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$. Концы этих векторов имеют следующие координаты:

$A(x_0 + x_1; y_0 + y_1)$ и $B(x_0 + x_2; y_0 + y_2)$.

Если точки M, A и B не лежат на одной прямой (рис. 48), то по теореме косинусов

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cdot \cos\alpha.$$

Это равенство верно и в том случае, когда точки M, A и B лежат на одной прямой (рис. 49). Из него следует, что

$$\cos\alpha = \frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2MA \cdot MB}. \qquad (6)$$

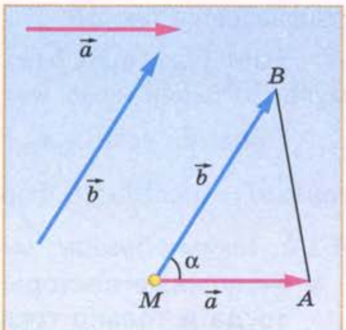
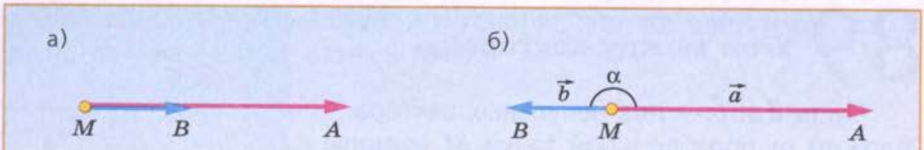


Рис. 48



а) $\alpha = 0°$, $\cos\alpha = 1$

$$AB^2 = (MA - MB)^2 = $$
$$= MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB = $$
$$= MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cdot \cos\alpha$$

б) $\alpha = 180°$, $\cos\alpha = -1$

$$MB^2 = (MA + MB)^2 = $$
$$= MA^2 + MB^2 + 2MA \cdot MB = $$
$$= MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos\alpha$$

Рис. 49

Зная координаты концов отрезков AB, MA и MB, по формуле (4) п. 88 получаем (проделайте вычисления самостоятельно):

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$
$$MA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad MB = \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$
$$MA^2 + MB^2 - AB^2 = 2\,(x_1x_2 + y_1y_2).$$

Подставляя эти выражения в равенство (6), приходим к формуле (5). Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что величина угла α не зависит от выбора точки M, от которой откладываются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Иными словами, если $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{NK}$ и $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NL}$, то $\angle AMB = \angle KNL$.

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются <u>перпендикулярными</u> ($\vec{a} \perp \vec{b}$), если угол между ними равен 90°. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ часто обозначается так: $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

Если $\vec{a}\{x_1, y_1\} \perp \vec{b}\{x_2; y_2\}$, то $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 0$, поэтому числитель в формуле (5) равен нулю: $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Обратно: если $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 0$ согласно формуле (5), и, следовательно, $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 90°$, т. е. $\vec{a} \perp \vec{b}$. Таким образом, мы доказали, что

■ **ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда**

$$\mathbf{x_1x_2 + y_1y_2 = 0.} \qquad (7)$$

Отсюда, в частности, следует, что если $\vec{a}\{x;\ y\} \neq \vec{0}$, то вектор $\vec{b}\{y;\ -x\}$ перпендикулярен к вектору $\vec{a}$, причём $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ (докажите справедливость этого равенства).

90 Уравнение окружности

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy и дана какая-нибудь линия L (рис. 50). Равенство, содержащее координаты точек, называется уравнением линии L в заданной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки $M\,(x;\ y)$ линии L и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на линии L.

Выведем уравнение окружности радиуса r с центром $M_0\,(x_0;\ y_0)$ в заданной прямоугольной системе координат Oxy (рис. 51).

Расстояние от точки $M\,(x;\ y)$ до точки M_0 равно

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Если точка M лежит на рассматриваемой окружности, то $M_0M = r$, или, что то же самое, $M_0M^2 = r^2$. Следовательно, координаты точки M в этом случае удовлетворяют уравнению

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \qquad (8)$$

Если же точка M не лежит на данной окружности, то $M_0M^2 \neq r^2$, поэтому координаты точки M не удовлетворяют уравнению (8). Итак,

в прямоугольной системе координат Oxy уравнение окружности радиуса r с центром в точке $M_0\,(x_0;\ y_0)$ имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

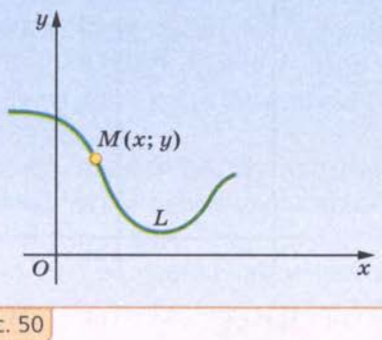


Рис. 50

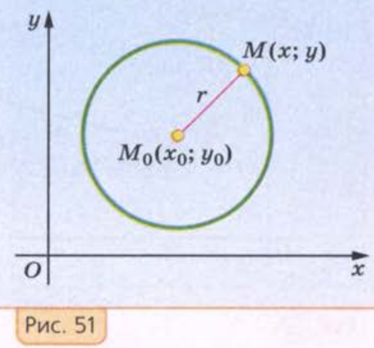


Рис. 51

91 Уравнение прямой

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Выведем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно к ненулевому вектору $\vec{n}\{a; b\}$ (рис. 52).

Если точка $M(x; y)$, отличная от точки M_0, лежит на данной прямой, то вектор $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0; y - y_0\}$ перпендикулярен к вектору $\vec{n}\{a; b\}$, поэтому в соответствии с формулой (7) п. 89 координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (9)$$

Координаты точки $M_0(x_0; y_0)$ также удовлетворяют этому уравнению. Таким образом, координаты всех точек данной прямой удовлетворяют уравнению (9). Если же точка M не лежит на указанной прямой, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ не перпендикулярны, поэтому координаты точки M не удовлетворяют уравнению (9). Следовательно,

- **в прямоугольной системе координат Oxy уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно к ненулевому вектору $\vec{n}\{a; b\}$, имеет вид $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.**

Если $b = 0$ (при этом $a \neq 0$, так как $\vec{n} \neq \vec{0}$), то уравнение (9) приводится к виду $x - x_0 = 0$, или $x = x_0$. Эта прямая параллельна оси Oy (рис. 53).

Если же $b \neq 0$, то разделим обе части уравнения (9) на b и введём обозначения: $k = -\frac{a}{b}$, $c = y_0 + \frac{ax_0}{b}$. Тогда уравнение прямой примет вид

$$y = kx + c.$$

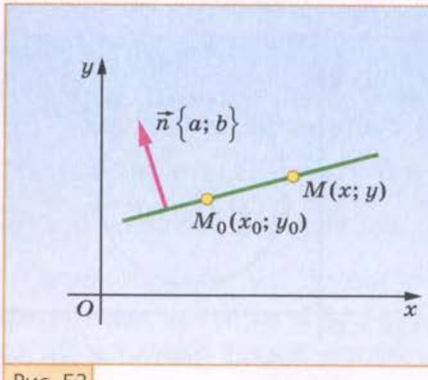


Рис. 52

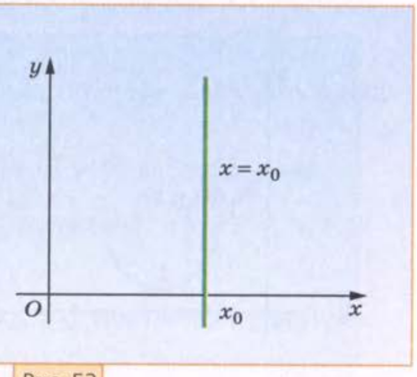


Рис. 53

Число k называется угловым коэффициентом прямой в данной системе координат.

Сравнивая угловые коэффициенты двух прямых, можно ответить на вопрос: пересекаются эти прямые или параллельны? Ответ содержится в следующем утверждении:

- **если угловые коэффициенты двух прямых различны, то эти прямые пересекаются, а если одинаковы, то прямые параллельны.**

Пусть прямые заданы уравнениями

$$y = k_1x + c_1, \quad y = k_2x + c_2.$$

Если $k_1 \neq k_2$, то, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = k_1x + c_1 \\ y = k_2x + c_2, \end{cases} \tag{10}$$

получим:

$$x = \frac{c_2 - c_1}{k_1 - k_2}, \quad y = \frac{k_1c_2 - k_2c_1}{k_1 - k_2}.$$

Найденные числа x и y удовлетворяют каждому из уравнений (10). Это означает, что точка $M\,(x;\,y)$, координаты которой равны этим числам, лежит на каждой из данных прямых, т. е. прямые пересекаются в точке M.

Если же $k_1 = k_2$, то $c_1 \neq c_2$ (в противном случае прямые совпадают), и, следовательно, система (10) не имеет решений. Это означает, что данные прямые не имеют общих точек, т. е. они параллельны.

Выведем теперь уравнение прямой, проходящей через две данные точки: $M_1\,(x_1;\,y_1)$ и $M_2\,(x_2;\,y_2)$ (рис. 54).

Ненулевой вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1;\, y_2 - y_1\}$, поэтому ненулевой вектор $\vec{n}\,\{(y_2 - y_1);\, -(x_2 - x_1)\}$ перпендикулярен к вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$ (см. п. 89, с. 27).

Так как прямая M_1M_2 проходит через точку M_1 и перпендикулярна к вектору $\vec{n}\,\{(y_2 - y_1);\, -(x_2 - x_1)\}$, то, согласно (9), её уравнение имеет вид

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0.$$

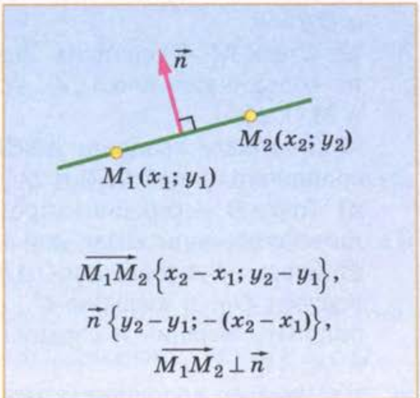


Рис. 54

Вопросы и задачи

1. а) Найдите координаты вершин равнобедренного треугольника ABC, изображённого на рисунке 55, если $AO = a$ и $CO = h$.

б) Точка A лежит на положительной полуоси Ox, а точка B — на отрицательной полуоси Oy. Найдите координаты точки M пересечения диагоналей прямоугольника $OACB$, если $OA = 4$ и $OB = 5$.

в) Точка M — середина отрезка AB. Найдите координаты точки A, если $B\,(4; 7)$ и $M\,(-3; -2)$.

г) Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A\,(0; 0)$, $B\,(3; 4)$ и $C\,(5; 9)$.

д) Даны точки $A\,(2; 3)$ и $B\,(4; 5)$. Найдите координаты точек C и D, если известно, что точка B — середина отрезка AC, а точка A — середина отрезка CD.

е) Вершина A трапеции $OABC$ лежит на положительной полуоси оси Oy, а вершина C — на положительной полуоси Ox. Найдите координаты вершин и середин диагоналей трапеции, если $OA = AB = 3$ и $OC = 5$.

ж) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите координаты вершин C и D, если $A\,(0; 0)$, $B\,(3; 0)$ и $M\,(-2; -1)$.

з) Даны точки $A\,(3; 6)$, $B\,(2; 9)$, $C\,(7; 8)$ и $D\,(8; 5)$. Докажите, что отрезки AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

2. а) Абсцисса вершины A равнобедренного треугольника ABC, изображённого на рисунке 55, равна -3, а ордината вершины C равна 4. Найдите AB и BC.

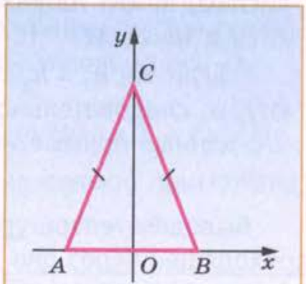


Рис. 55

б) Точка A лежит на положительной полуоси Ox, а точка B — на отрицательной полуоси Oy. Найдите координаты точки M пересечения диагоналей прямоугольника $OACB$, если $OA = a$ и $OB = b$.

в) Точка M — середина отрезка AB. Найдите координаты точки A, если $B\,(a + 1; b - 1)$ и $M\,(1; b)$.

г) Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в начале координат. Найдите координаты точек B, C и D, если $A\,(5; 0)$.

д) Точка B — середина отрезка AD, точка C — середина отрезка BD. Найдите координаты точек A и D, если $B\,(-2; 1)$ и $C\,(-5; -3)$.

е) Вершина A трапеции $OABC$ с основанием AB лежит на положительной полуоси Oy, а вершина C — на отрицательной полуоси Ox. Найдите координаты вершин и середин диагоналей трапеции, если $OA = 4$, $AB = 8$ и $OC = 2$.

ж) Найдите координаты вершин B и C ромба $ABCD$, если $\angle BAD = 30°$, $A\,(0; 0)$, $D\,(6; 0)$, а ордината вершины B отрицательна.

з) При каких значениях a и b отрезки AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, если $A(1; 2)$, $B(-2; 5)$, $C(a; 6)$ и $D(-4; b)$?

3. а) Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$.

б) Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Назовите вектор с началом D, равный вектору $-\overrightarrow{BA}$.

в) Определите вид четырёхугольника $ABCD$, в том случае когда $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ и $AC \perp BD$.

г) Через точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AD и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

4. а) Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

б) Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения его диагоналей. Назовите вектор с началом O, равный вектору $-\overrightarrow{OD}$.

в) Определите вид четырёхугольника $ABCD$, в том случае когда $AB \parallel CD$ и $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$.

г) Через вершину A и середину стороны BC четырёхугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямую CD в точке M. Докажите, что $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

5. а) Как связаны между собой ненулевые координаты векторов $\vec{a}$ и $-\vec{a}$?

б) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: $A(3; -1)$ и $B(2; -1)$; $A(-2; 6)$ и $B(3; -1)$.

в) Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Можно ли на прямой AC от точки A отложить вектор, равный вектору $\overrightarrow{BD}$?

г) От точки M, лежащей внутри треугольника ABC, отложены векторы $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{BC}$. Докажите, что $MNPQ$ — параллелограмм.

д) Даны точки $A(3; -1)$, $B(2; 3)$, $C(7; 0)$ и $D(8; -4)$. Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Равны ли векторы $-\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AD}$?

6. а) Докажите, что если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

б) Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{-2; 3\}$. Найдите координаты точки: A, если $B(0; 5)$; B, если $A(2; 4)$.

в) Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Можно ли на прямой AB от точки B отложить вектор, равный вектору $\overrightarrow{CD}$?

г) От точки M, лежащей вне равностороннего треугольника ABC, отложены векторы $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{BC}$. Докажите, что $MP \perp NQ$.

д) При каких значениях a и b выполняется равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если $A(-1; 3)$, $B(a; 5)$, $C(0; -3)$ и $D(1; b)$?

7. а) Найдите длины векторов $\vec{a}\{3; -2\}$, $\vec{b}\{2\sqrt{3}; -6\}$, $\vec{d}\{0; 0\}$.

б) Даны точки $M(-4; 7)$ и $N(0; -1)$. Найдите длину отрезка MN и расстояние от начала координат до середины отрезка MN.

в) Даны точки $A(2; 5)$ и $B(1; -1)$. Найдите координаты точки M, лежащей на оси Ox, для которой $MA^2 = 2MB^2$.

г) Найдите угол между векторами: $\vec{a}\{2; -2\}$ и $\vec{b}\{3; 0\}$; $\vec{a}\{\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ и $\vec{b}\{-3; -3\}$.

д) Найдите углы треугольника, вершинами которого являются точки $A(1; -1)$, $B(1 + 2\sqrt{2}; -1)$ и $C(-1; 1)$.

8. а) Найдите $|\overrightarrow{AB}|$, если: $A(-1; 0)$ и $B(1; -2)$; $A(-35; -17)$ и $B(-32; -13)$.

б) Даны вершины треугольника: $A(0; 7)$, $B(8; -8)$ и $C(-8; 4{,}5)$. Найдите сторону AB и медиану CM.

в) Найдите координаты точек, равноудалённых от точек $A(2; 3)$ и $B(3; 4)$ и расположенных на осях координат.

г) Найдите угол между векторами: $\vec{a}\{-2{,}5; 2{,}5\}$ и $\vec{b}\{-5; 5\}$; $\vec{a}\{-1; 2\}$ и $\vec{b}\{6; 3\}$.

д) Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, его периметр и углы, если $A(0; 0)$, $B(3; 0)$ и $C(4; \sqrt{3})$.

9. а) Напишите уравнение окружности с центром $C(2; -3)$ радиуса 5.

б) Найдите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 20$. Проходит ли эта окружность через начало координат?

в) Напишите уравнение окружности с центром $A(3; 4)$, проходящей через точку $B(5; 2)$.

г) Даны точки $A(-1; 6)$ и $B(-1; -2)$. Докажите, что отрезок AB — диаметр окружности, заданной уравнением $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

д) Даны точки $A(1; 3)$, $B(-1; 1)$ и $C(2; 2)$. Определите вид треугольника ABC и найдите координаты центра и радиус описанной около него окружности.

е) Точка C — середина отрезка AB, равного 4. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 35$.

10. а) Напишите уравнение окружности с центром $C(-2; -4)$ радиуса $\frac{1}{2}$.

б) Найдите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 40$. Проходит ли эта окружность через точку $A(5; 0)$?

в) Даны точки $A(2; -3)$ и $B(-8; 7)$. Напишите уравнение окружности с диаметром AB.

г) Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$, является окружностью, и найдите координаты её центра и радиус.

д) Даны точки $A(1; 3)$, $B(1; -3)$ и $C(-3; 0)$. Напишите уравнение окружности, описанной около треугольника ABC.

е) Точка C — середина отрезка AB, равного 4. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $AM^2 - 2BM^2 + 5CM^2 = 3$.

11. а) Напишите уравнения прямых AB и CD, если $A\,(1; -1)$, $B\,(-3; 2)$, $C\,(2; 5)$ и $D\,(5; 2)$. Найдите угловые коэффициенты этих прямых. Пересекаются ли эти прямые?

б) Точки $A\,(2; 2)$, $B\,(4; 8)$ и $C\,(-6; 10)$ — вершины параллелограмма $ABCD$. Напишите уравнение прямой AD.

в) Выясните взаимное расположение прямой $y - x - 4 = 0$ и окружности $x^2 + y^2 = 8$.

12. а) Точки $A\,(1; 3)$, $B\,(3; 1)$, $C\,(5; 5)$ и $D\,(7; 15)$ — вершины трапеции $ABCD$. Напишите уравнение прямой, содержащей среднюю линию трапеции, и уравнения прямых, содержащих её основания. Сравните угловые коэффициенты этих прямых.

б) Основание перпендикуляра, проведённого из начала координат к прямой, имеет координаты (3; 4). Напишите уравнение этой прямой.

в) Хорда окружности $x^2 + y^2 = 1$ лежит на прямой $4y + 3x - 4 = 0$. Найдите длину этой хорды.

§ 20 Операции с векторами

92 Сумма векторов

Пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — данные векторы (рис. 56, *а*). Отложим от точки B вектор $\overrightarrow{BE}$, равный вектору $\overrightarrow{CD}$ (рис. 56, *б*). Вектор $\overrightarrow{AE}$, и также любой равный ему вектор, называется суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Этот способ построения суммы векторов называют правилом треугольника. Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} + \vec{b}$.

Из определения суммы векторов следует, что:

- **для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;**
- **если A, B и C — произвольные точки, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.**

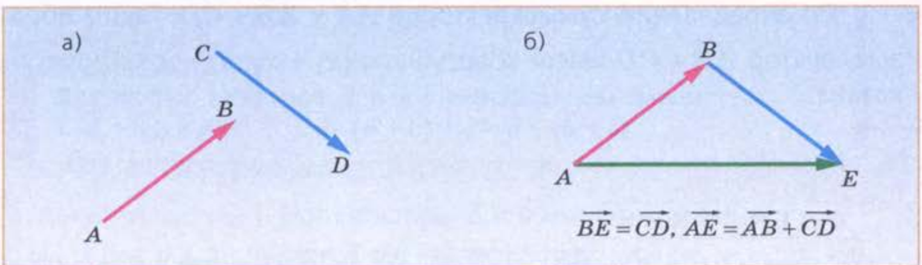


Рис. 56

Подчеркнём, что последнее равенство справедливо для любых точек A, B и C, в частности, в том случае, когда две из них или все три совпадают. Например, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \vec{0}$. Таким образом,

- **для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.**

Докажем теорему о координатах суммы двух векторов.

ТЕОРЕМА

Каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

Доказательство. Рассмотрим произвольные векторы $\overrightarrow{AB}\{x_1; y_1\}$ и $\overrightarrow{CD}\{x_2; y_2\}$ и докажем, что вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$.

Пусть $(x_0; y_0)$ — координаты точки A. Поскольку координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны $\{x_1; y_1\}$, то координаты точки B равны $(x_0 + x_1; y_0 + y_1)$. Отложим от точки B вектор $\overrightarrow{BE}$, равный вектору $\overrightarrow{CD}$ (рис. 57). Так как координаты вектора $\overrightarrow{BE}$ равны $(x_2; y_2)$, то координаты точки E равны

$$((x_0 + x_1) + x_2; (y_0 + y_1) + y_2).$$

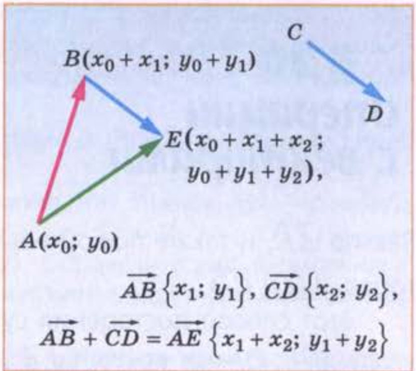


Рис. 57

Поэтому координаты вектора $\overrightarrow{AE}$ равны

$$\{(x_0 + x_1 + x_2) - x_0; (y_0 + y_1 + y_2) - y_0\} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}.$$

По определению суммы векторов $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ

Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 58).

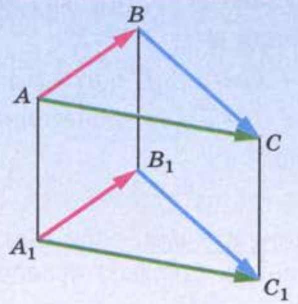


Рис. 58

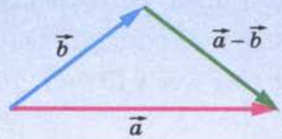


Рис. 59

В самом деле, согласно доказанной теореме координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ равны, поэтому равны и сами эти векторы.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$:

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}.$$

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} - \vec{b}$ (рис. 59). Из доказанной теоремы следует, что

- **каждая координата разности векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.**

Иными словами, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$, то вектор $\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$.

93 Свойства сложения векторов

Докажем теорему о свойствах сложения векторов.

ТЕОРЕМА

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; 2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Доказательство. 1. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$, то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$. Такие же координаты имеет вектор $\vec{b} + \vec{a}$. Следовательно, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют координаты $\{x_1; y_1\}$, $\{x_2; y_2\}$ и $\{x_3; y_3\}$, то вектор $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ имеет координаты

$\{(x_1+x_2)+x_3; (y_1+y_2)+y_3\}$, т. е. $\{x_1+x_2+x_3; y_1+y_2+y_3\}$.

Такие же координаты имеет вектор $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. Следовательно, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. Теорема доказана.

Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Рассмотрим ещё один способ обоснования справедливости равенства 1 для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Обратимся к рисунку 60, на котором от точки A отложены векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и построен параллелограмм $ABCD$. По правилу треугольника $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}$. Следовательно, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

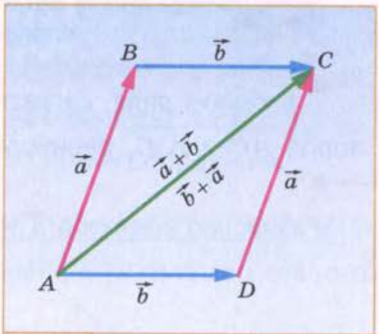


Рис. 60

Это доказательство даёт нам ещё один способ построения суммы двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, который называется правилом

Коллинеарность — от латинских **co** (с, вместе) и **linearis** (линейный).

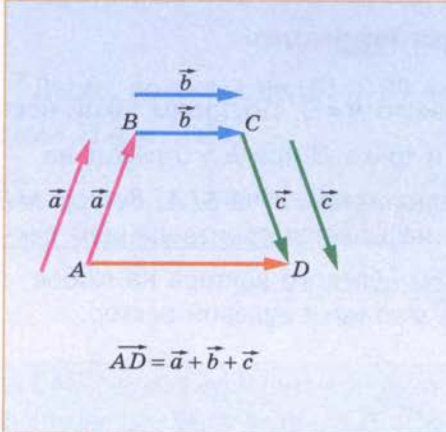


Рис. 61

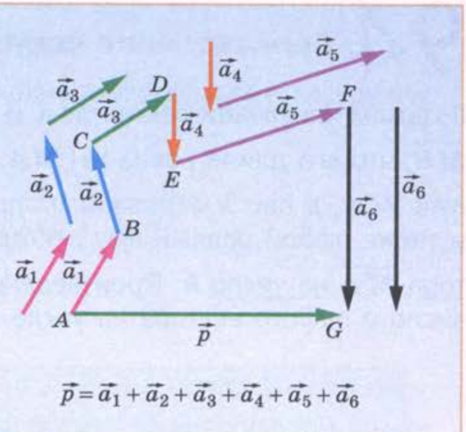


Рис. 62

параллелограмма: нужно отложить от какой-нибудь точки A векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и построить параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 60). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ будет равен $\vec{a}+\vec{b}$. Это правило часто используется в физике, например при сложении двух сил.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются. На рисунке 61 показано построение суммы трёх векторов: от произвольной точки A отложен вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, от точки B отложен вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, а от точки C отложен вектор $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$. В результате получился вектор $\overrightarrow{AD}$, равный

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

Аналогичным образом можно построить сумму четырёх, пяти, шести (рис. 62) и вообще любого числа векторов. Такой способ построения суммы нескольких векторов называется правилом многоугольника.

Правило многоугольника можно сформулировать и так: если A_1, A_2, ..., A_n — произвольные точки плоскости, то

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$

Подчеркнём, что это равенство справедливо для любых точек A_1, A_2, ..., A_n, в частности, в том случае, когда некоторые из них совпадают. Например, если точка A_1 совпадает с точкой A_n, то сумма данных векторов равна нулевому вектору.

94 Произведение вектора на число

Возьмём ненулевой вектор $\overrightarrow{MA}$ и число $k \neq 0$. Построим такой вектор $\overrightarrow{MB}$, что его длина равна $|k|MA$, и точка B при $k > 0$ лежит на луче MA, а при $k < 0$ лежит на продолжении луча MA. Вектор $\overrightarrow{MB}$, и также любой равный ему вектор, называется произведением вектора $\overrightarrow{MA}$ на число k. Произведением нулевого вектора на любое число и любого вектора на число 0 считается нулевой вектор.

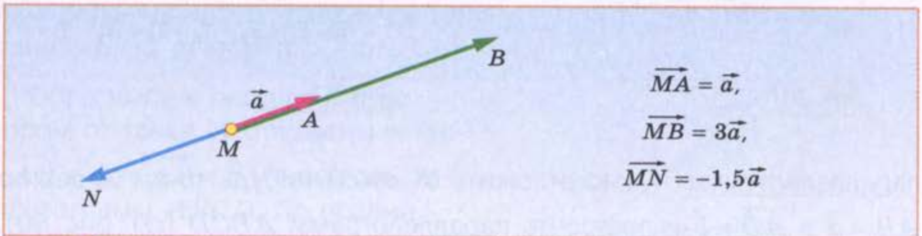


Рис. 63

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $k\vec{a}$. На рисунке 63 изображены вектор $\vec{a}$ и векторы $3\vec{a}$ и $-1{,}5\vec{a}$.

ТЕОРЕМА

Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{MA}\ \{x;\ y\}$ — произвольный вектор, k — произвольное число. Требуется доказать, что координаты вектора $k\overrightarrow{MA}$ равны $\{kx;\ ky\}$. С этой целью рассмотрим вектор $\overrightarrow{MB}\ \{kx;\ ky\}$ и докажем, что $k\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

Если $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ или $k = 0$, то $k\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ (согласно определению произведения вектора на число) и $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (поскольку $kx = ky = 0$), поэтому

$$k\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}.$$

Пусть $\overrightarrow{MA} \neq \vec{0}$ и $k \neq 0$. Поскольку

$$MB^2 = (kx)^2 + (ky)^2 = k^2(x^2 + y^2) = k^2MA^2,$$

то

$$MB = |k| \cdot MA.$$

Далее, по формуле (5) п. 89 находим косинус угла α между векторами $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$:

$$\cos\alpha = \frac{x \cdot kx + y \cdot ky}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2}} =$$

$$= \frac{k(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\,|k|} = \frac{k}{|k|}.$$

Следовательно, $\cos\alpha = 1$ при $k > 0$ и $\cos\alpha = -1$ при $k < 0$. В первом случае $\alpha = 0°$, т. е. точка B лежит на луче MA; во втором случае $\alpha = 180°$, т. е. точка B лежит на продолжении луча MA.

Таким образом, $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MA}$, поэтому координаты вектора $k\overrightarrow{MA}$ равны $\{kx;\ ky\}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:

1. $(kl)\,\vec{a} = k\,(l\vec{a})$;

2. $(k + l)\,\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$;

3. $k\,(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Докажем, например, утверждение 1 (остальные утверждения доказываются аналогично).

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x;\ y\}$, то вектор $(kl)\,\vec{a}$ имеет координаты $\{klx;\ kly\}$. Такие же координаты имеет вектор $k\,(l\vec{a})$. Следовательно, $(kl)\,\vec{a} = k\,(l\vec{a})$. Утверждение доказано.

Свойства сложения векторов и умножения вектора на число позволяют преобразовывать векторные выражения по тем же правилам, что и числовые выражения. Например, выражение

$$3\,(\vec{a} + \vec{b}) - 2\,(\vec{c} - \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

можно преобразовать так:

$$3\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} + 2\vec{b} + \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 4\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}.$$

95 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению их длин, умноженному на косинус угла между векторами; скалярное произведение двух векторов, хотя бы один из которых нулевой, считается равным нулю. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$. Таким образом, для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) \qquad (1)$$

и для любого вектора $\vec{a}$ справедливы равенства $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$ и $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$.

Из этих формул, в частности, следует, что $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ и обозначается символом $\vec{a}^2$. Таким образом,

- **скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:** $\boldsymbol{\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2}$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вычислить, зная координаты $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$ этих векторов. В самом деле, если данные векторы ненулевые, то, используя формулу (5) п. 89, получаем: $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, поэтому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Эта формула, очевидно, верна и в том случае, когда один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой. Итак,

- **скалярное произведение векторов $\vec{a}\,\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2; y_2\}$ выражается формулой**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2. \qquad (2)$$

Сопоставляя это равенство с условием перпендикулярности ненулевых векторов (формула (7), п. 89), приходим к выводу:

- **скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.**

Из формулы (1) следует, что

- **скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда $\widehat{\vec{a}\vec{b}} < 90°$ ($\widehat{\vec{a}\vec{b}} > 90°$).**

На рисунке 64

$$\widehat{\vec{a}\vec{b}} < 90°,\ \widehat{\vec{a}\vec{c}} = 90°,\ \widehat{\vec{b}\vec{c}} > 90°,$$

поэтому

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0,\ \ \vec{a}\cdot\vec{c} = 0,\ \ \vec{b}\cdot\vec{c} < 0.$$

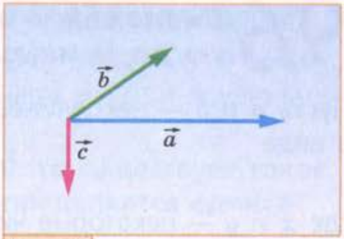


Рис. 64

Докажем, что скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1. $\vec{a}^2 \geqslant 0$, причём $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$;
2. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
3. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$;
4. $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Доказательство. Справедливость утверждения 1 следует из формулы $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, а утверждения 2 — из определения скалярного произведения.

Докажем утверждения 3 и 4. Для этого введём прямоугольную систему координат и обозначим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ так: $\vec{a}\{x_1;\, y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\, y_2\}$, $\vec{c}\{x_3;\, y_3\}$. Используя формулу (2), выражающую скалярное произведение векторов через их координаты, получаем:

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = (x_1 + x_2)\,x_3 + (y_1 + y_2)\,y_3 =$$
$$= (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3) = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Утверждение 3 доказано.

Вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $\{kx_1;\, ky_1\}$, поэтому

$$(k\vec{a})\,\vec{b} = (kx_1)\,x_2 + (ky_1)\,y_2 = k\,(x_1x_2 + y_1y_2) = k\,(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Утверждение 4 доказано.

Отметим, что утверждение 3 обобщается на любое число слагаемых. Например,

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,\vec{d} = \vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{d} + \vec{c}\cdot\vec{d}.$$

96 Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Если вектор $\vec{c}$ представлен в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \qquad (3)$$

где x и y — некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{c}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Числа x и y называются коэффициентами разложения вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

ТЕОРЕМА

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то любой вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причём коэффициенты этого разложения определяются единственным образом.

Доказательство. Отметим произвольную точку O и отложим от неё векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Введём прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы вектор $\overrightarrow{OA}$ лежал на оси Ox, и обозначим координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ следующим образом: $\overrightarrow{OA}\{a;\ 0\}$, $\overrightarrow{OB}\{b_1;\ b_2\}$ и $\overrightarrow{OC}\{c_1;\ c_2\}$ (рис. 65).

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, поэтому $a \neq 0$ и $b_2 \neq 0$. Записывая равенство (3) в координатах, получаем систему двух уравнений относительно x и y:

$$c_1 = xa + yb_1,\ c_2 = yb_2. \qquad (4)$$

Поскольку $b_2 \neq 0$, то из второго уравнения можно найти (причём единственным образом) y; подставляя найденное значение y в первое уравнение и учитывая, что $a \neq 0$, можно найти (единственным образом) x. Следовательно, существует, и притом единственная, пара чисел x и y, для которой выполнены равенства (4), равносильные равенству (3). Теорема доказана.

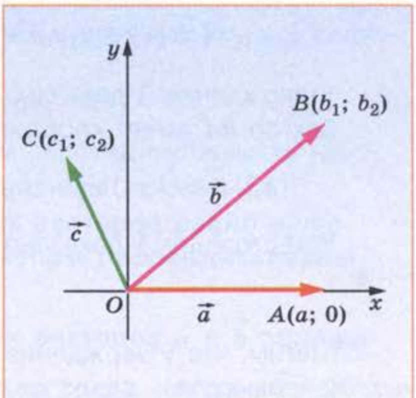


Рис. 65

Обратим внимание на то, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, то вектор $\overrightarrow{OC}$, как и вектор $\overrightarrow{OA}$, лежит на оси Ox, т. е. $c_2 = 0$. В этом случае из второго уравнения системы (4) получаем $y = 0$, и, следовательно, $\vec{c} = x\vec{a}$. Таким образом,

- **если векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число x, что $\vec{c} = x\vec{a}$, причём это число определяется единственным образом.**

Вопросы и задачи

13. а) Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Найдите сумму $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

б) Докажите, что для любых точек A, B, C и D имеет место равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

в) Может ли длина суммы двух векторов быть меньше длины каждого из слагаемых?

г) Даны векторы $\vec{a}\{3; -5\}$, $\vec{b}\{0; 7\}$ и $\vec{c}\left\{\frac{2}{3}; 0\right\}$. Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{c}$.

д) Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Назовите вектор с началом A, равный вектору $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$.

е) Выразите вектор $\overrightarrow{CB}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

ж) Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равной разности длин этих векторов?

14. а) Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Назовите вектор с началом C, равный вектору $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}$.

б) Докажите, что для любых точек A, B, C и D имеет место равенство: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$.

в) Докажите, что для любых двух неколлинеарных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливо неравенство: $|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

г) Даны векторы $\vec{a}\{3; -5\}$, $\vec{b}\{0; 7\}$, $\vec{c}\left\{\frac{2}{3}; 0\right\}$ и $\vec{d}\{-2,7; 3,1\}$. Найдите координаты векторов $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{d} + \vec{b}$ и $\vec{d} + \vec{a}$.

д) Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, где $(-\vec{b})$ — вектор, противоположный вектору $\vec{b}$.

е) Выразите вектор $\overrightarrow{BA}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

ж) Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов?

15. а) Начертите неколлинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и постройте их сумму по правилу параллелограмма.

б) Упростите выражения: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{QK}+\overrightarrow{PF}$.

в) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Докажите, что $|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}|$.

г) Даны векторы $\vec{a}\{5; -1\}$, $\vec{b}\{-2; 1\}$, $\vec{c}\{0; 0{,}2\}$ и $\vec{d}\left\{\frac{1}{3}; 2\frac{2}{5}\right\}$. Найдите координаты векторов $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{d}-\vec{a}$ и $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

д) Упростите выражение: $(\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{KP})-(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{QK}+\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{BC})$.

е) Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

ж) Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, O — произвольная точка. Выразите вектор $\overrightarrow{OA}$ через векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$.

з) Известно, что $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=\widehat{\vec{a}\vec{c}}=120°$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ и $\vec{b}\neq\vec{c}$. Докажите, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

16. а) Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с разными началами и постройте их сумму по правилу параллелограмма.

б) Упростите выражения: $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MP}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NM}$.

в) Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Докажите, что $|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{MD}|=|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}|$.

г) Даны векторы $\vec{a}\{5; -1\}$, $\vec{b}\{-2; 1\}$, $\vec{c}\{0; 0{,}2\}$ и $\vec{d}\left\{\frac{1}{3}; 2\frac{2}{5}\right\}$. Найдите координаты векторов $\vec{a}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{d}$ и $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$.

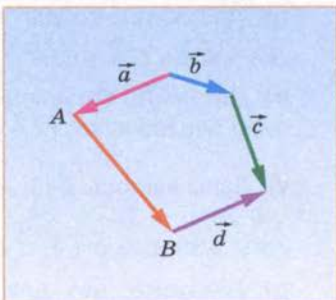


Рис. 66

д) Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$, изображённый на рисунке 66, через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

е) Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{CB}$.

ж) Известно, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, причём точки A, B и C не лежат на одной прямой. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

з) Известно, что $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 90°$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}} = \widehat{\vec{a}\vec{c}} = 135°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $|\vec{c}| = \sqrt{2}$. Докажите, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

17. а) Начертите неколлинеарные векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и постройте вектор, равный $2\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{q}$.

б) Точка C — середина отрезка AB, а O — произвольная точка. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

в) Даны векторы $\vec{a}\{-1; 1\}$, $\vec{b}\{0; 2\}$, $\vec{c}\{-3; 2\}$ и $\vec{d}\{-2; 1\}$. Найдите координаты векторов $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ и $-\vec{a} + 2\vec{c} - \vec{d}$.

г) Коллинеарны ли векторы: $\vec{a}\{3; 6\}$ и $\vec{b}\{6; 12\}$; $\vec{c}\{1; -1\}$ и $\vec{d}\{2; 3\}$?

д) Начертите треугольник ABC и постройте вектор $-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$.

е) Упростите выражение: $2(\vec{m} + \vec{n}) - 3(2\vec{m} - \vec{n}) - 5\vec{m}$.

ж) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CB_1} = k\overrightarrow{CA}$. Найдите $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$.

з) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, точки M и N — середины отрезков OA и OB. Найдите, если это возможно, число k, для которого выполняется равенство: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{NC} = k\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{BM} = k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO})$; $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AO}$.

и) Точки M и N — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$. Используя векторы, докажите, что $MN \leqslant \frac{1}{2}(AD + BC)$, причём знак равенства имеет место только в том случае, когда $AD \parallel BC$.

18. а) Начертите неколлинеарные векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ и постройте вектор, равный $3\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$.

б) Точки A, B и M удовлетворяют условию $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$, где $k \neq -1$. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой, и для любой точки O выполняется равенство $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1 + k}$.

в) Даны векторы $\vec{a}\{-1; 1\}$, $\vec{b}\{0; 2\}$, $\vec{c}\{-3; 2\}$ и $\vec{d}\{-2; 1\}$. Найдите координаты векторов $0{,}1\vec{a} + 3\vec{b} + 0{,}7\vec{c} - 5\vec{d}$ и $(2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b}) + 2(\vec{a} - \vec{b})$.

г) Коллинеарны ли векторы: $\vec{i}\{1; 0\}$ и $\vec{j}\{0; 1\}$; $\vec{m}\{0; 0\}$ и $\vec{n}\{5; 7\}$; $\vec{p}\left\{\frac{1}{3}; -1\right\}$ и $\vec{q}\{-1; -3\}$?

д) Начертите треугольник ABC и постройте вектор $-3\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)$.

е) Упростите выражение: $4\vec{m} - 3(\vec{n} - \vec{m} + \vec{p}) + 5(\vec{p} - 4\vec{m})$.

ж) На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P, E, F и M так, что $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DA}$. Докажите, что $PEFM$ — параллелограмм.

з) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, точки M и N — середины отрезков OA и OB. Найдите, если это возможно, число k, для которого выполняется равенство: $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{NC} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BC})$; $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD}$.

и) Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, а O — произвольная точка, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

19. а) Диагонали квадрата $ABCD$ со стороной, равной 1, пересекаются в точке O. Найдите $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$.

б) Даны векторы $\vec{a}\{1; -1\}$, $\vec{b}\{-1; 1\}$ и $\vec{c}\{5; 6\}$. Найдите $\vec{a}\vec{c}$; $\vec{a}\vec{b}$; $\vec{b}\vec{c}$; $\vec{a}\vec{a}$; $\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$.

в) Даны векторы $\vec{a}\{-1; 2\}$ и $\vec{b}\{5; x\}$. Найдите x, если: $\vec{a}\vec{b} = 3$; $\vec{a}\vec{b} = -1$; $\vec{a} \perp \vec{b}$.

г) Найдите $\vec{p}\vec{q}$, если $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 5$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$.

д) Отрезок BD, равный 3, — высота равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 8$. Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA}$.

е) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 6$ и $BC = 2$ угол A прямой, $AB = 3$. Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

ж) В треугольнике с вершинами $A(x; 3)$, $B(1; 1)$ и $C(-2; 4)$ угол C прямой. Найдите x и косинус острого угла между стороной AB и медианой CM.

з) Диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{CB}^2$.

20. а) Точки M и N — середины сторон AB и BC равностороннего треугольника ABC со стороной, равной 1. Найдите $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

б) Даны векторы $\vec{a}\{3; -1\}$, $\vec{b}\{-5; 1\}$ и $\vec{c}\{-1; -2\}$. Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами: $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\vec{b}$ и $\vec{c}$; $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

в) Даны векторы $\vec{a}\{3; -5\}$ и $\vec{b}\{-2; x + 1\}$. При каких значениях x выполняется соотношение: $\vec{a}\vec{b} > 0$; $\vec{a}\vec{b} = 0$; $\vec{a}\vec{b} < 0$?

г) Найдите $\vec{a}\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{c} + 3\vec{d}$, $\vec{b} = 7\vec{c} - 4\vec{d}$, $\vec{c} \perp \vec{d}$ и $|\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$.

д) На диагоналях BD и AC ромба $ABCD$, в котором $AB = 10$ и $AC = 16$, отмечены точки M и N. Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{NC}$.

е) Боковая сторона AB равнобедренной трапеции $ABCD$ равна 13, $AD = 15$, $BC = 5$, отрезок CK — высота треугольника ACD. Найдите $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

ж) Диагонали четырёхугольника $ABCD$ с вершинами $A\,(1; -3)$, $B\,(x; -1)$, $C\,(2; 1)$ и $D\,(1; 2)$ взаимно перпендикулярны. Найдите x и косинус угла ADM, где M — середина отрезка AB.

з) Четырёхугольник $ABCD$ — трапеция с основанием AD. Докажите, что $\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

21. а) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, точка M делит отрезок AD в отношении 1 : 2, считая от точки A. Разложите по векторам $\vec{x} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{AB}$ вектор: $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CO}$.

б) Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. Разложите векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.

в) Разложите векторы $\vec{a}\,\{5; -1\}$, $\vec{b}\,\{-3; -1\}$, $\vec{c}\,\{0; -1\}$ и $\vec{d}\,\{0; 0\}$ по векторам $\vec{i}\,\{1; 0\}$ и $\vec{j}\,\{0; 1\}$.

г) Вектор $\vec{a}$ разложен по векторам $\vec{i}\,\{x_1; y_1\}$ и $\vec{j}\,\{x_2; y_2\}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Докажите, что $\vec{a}\vec{p} = y\,(\vec{j}\vec{p})$ и $\vec{a}\vec{q} = x\,(\vec{i}\vec{q})$, где $\vec{p}\,\{y_1; -x_1\}$, $\vec{q}\,\{y_2; -x_2\}$.

д) Точка M — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$, отрезок BM пересекает диагональ AC в точке N. Разложите вектор $\overrightarrow{BN}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

22. а) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, точка M делит отрезок AD в отношении 1 : 2, считая от точки A. Разложите по векторам $\vec{x} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{AB}$ вектор: $\overrightarrow{CO}$; $\overrightarrow{DO}$; $\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OA}$.

б) Точка M делит основание AD трапеции $ABCD$ в отношении 1 : 2, считая от точки A, $MD = 2BC$. Разложите векторы $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{BC}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$.

в) Разложите векторы $\vec{a}\,\{5; -1\}$, $\vec{b}\,\{-3; -1\}$, $\vec{c}\,\{0; -1\}$ и $\vec{d}\,\{0; 0\}$ по векторам $\vec{i}\,\{-1; 0\}$ и $\vec{j}\,\{0; 1\}$.

г) Разложите векторы $\vec{a}\,\{3; -4\}$ и $\vec{b}\,\{2; 5\}$ по векторам $\vec{i}\,\{1; -3\}$ и $\vec{j}\,\{3; 1\}$.

д) Точка M делит сторону AD параллелограмма $ABCD$ в отношении 1 : 2, считая от точки A, отрезок BM пересекает диагональ AC в точке N. Разложите вектор $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

§ 21 Геометрические преобразования

97 Осевая симметрия

Пусть a — данная прямая. Каждой точке M сопоставим симметричную ей относительно прямой a точку M_1 (рис. 67). В результате каждой точке M будет сопоставлена некоторая точка M_1, и каждая точка M_1 окажется сопоставленной некоторой точке M, т. е., как говорят, будет задано отображение плоскости на себя. Оно называется осевой симметрией, а прямая a — осью симметрии.

Осевая симметрия является отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния между точками. Поясним смысл этих слов.

Пусть A и B — какие-нибудь точки, A_1 и B_1 — точки, симметричные им относительно прямой a. Тогда $A_1B_1 = AB$.

Для доказательства этого утверждения введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 68.

Так как

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

и

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

то $AB = A_1B_1$, т. е. расстояние между любыми точками A и B равно расстоянию между сопоставленными им точками A_1 и B_1. Это и означает, что осевая симметрия сохраняет расстояния между точками.

Отсюда следует, что при осевой симметрии каждый отрезок отображается на равный ему отрезок.

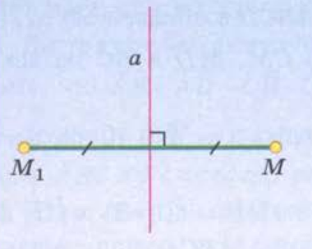


Рис. 67

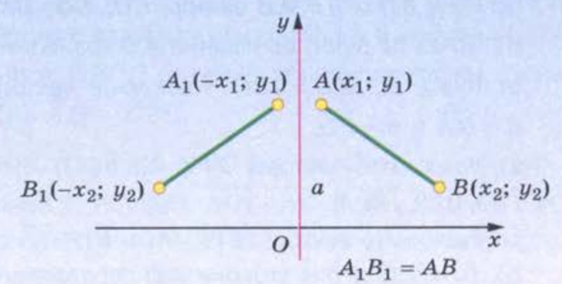


Рис. 68

Действительно, пусть A и B — какие-нибудь точки и точка M лежит на отрезке AB. Точки A_1, B_1 и M_1 симметричны этим точкам относительно прямой a. Так как точка M лежит на отрезке AB, то

$$AM + MB = AB,$$

а поскольку осевая симметрия сохраняет расстояния между точками, то

$$A_1B_1 = AB,\ A_1M_1 = AM \text{ и } M_1B_1 = MB.$$

Из этих равенств получаем:

$$A_1M_1 + M_1B_1 = A_1B_1,$$

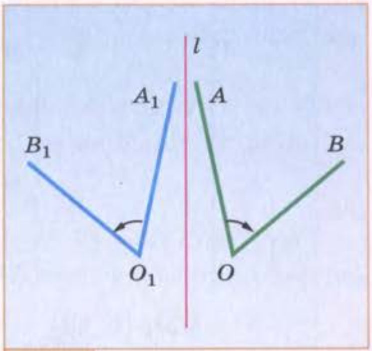


Рис. 69

поэтому точка M_1 лежит на отрезке A_1B_1, т. е. при осевой симметрии любая точка отрезка AB переходит в некоторую точку отрезка A_1B_1.

И наоборот, в каждую точку M_1 отрезка A_1B_1 переходит некоторая точка M отрезка AB (а именно точка M, симметричная точке M_1 относительно прямой a). Таким образом, отрезок AB отображается на отрезок A_1B_1; эти отрезки равны, так как $AB = A_1B_1$.

Следовательно, при осевой симметрии прямая отображается на прямую, луч — на луч, а треугольник — на равный ему треугольник. Поэтому и угол отображается на равный ему угол.

Здесь целесообразно внести уточнение. Обратимся к рисунку 69, на котором изображены угол AOB и угол $A_1O_1B_1$, симметричный углу AOB относительно прямой l. Рассмотрим сначала угол AOB. Мы видим, что кратчайший поворот вокруг точки O от OA к OB совершается по часовой стрелке. Обратимся теперь к углу $A_1O_1B_1$. В нём кратчайший поворот вокруг точки O_1 от O_1A_1 к O_1B_1 совершается против часовой стрелки.

Обычно это свойство осевой симметрии формулируют так:

- **осевая симметрия сохраняет величину угла, но меняет его ориентацию.**

98 Движения

Мы говорили, что осевая симметрия является отображением, сохраняющим расстояния. Любое отображение, обладающее этим свойством, называется движением. Таким образом, <u>движение плоскости</u> — это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.

Из этого определения следует, что результат последовательного выполнения двух движений является движением (объясните почему).

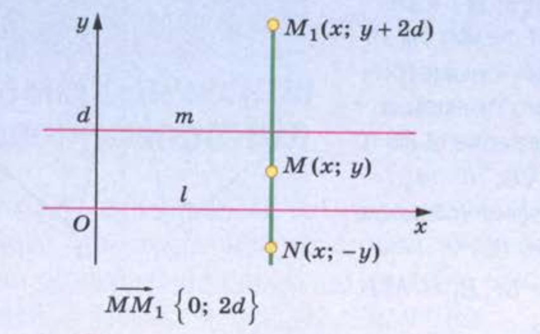


Рис. 70

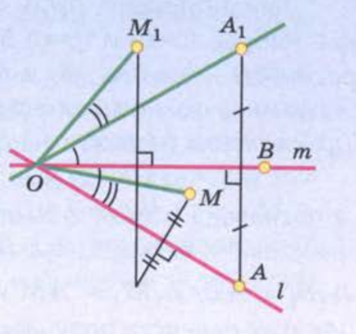


Рис. 71

В частности, последовательное выполнение двух осевых симметрий является движением, сохраняющим не только величину угла, но и его ориентацию.

Выясним, какое движение получается в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий с осями l и m. Возможны два случая: прямые l и m параллельны; прямые l и m пересекаются. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1 Обозначим буквой d расстояние между параллельными прямыми l и m и введём систему координат Oxy так, чтобы ось Ox совпала с прямой l, а прямая m имела уравнение $y = d$ (рис. 70).

Рассмотрим произвольную точку $M\,(x;\ y)$. При симметрии относительно прямой l она перейдёт в точку $N\,(x;\ -y)$. Точка N, в свою очередь, при симметрии относительно прямой m перейдёт в такую точку M_1, что прямая m окажется серединным перпендикуляром к отрезку NM_1. Поэтому середина отрезка NM_1 имеет координаты $(x;\ d)$, и, следовательно, сама точка M_1 — координаты $(x;\ y + 2d)$.

Итак, в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий произвольная точка $M\,(x;\ y)$ перешла в точку $M_1\,(x;\ y + 2d)$, т. е. в такую точку M_1, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ имеет координаты $\{0;\ 2d\}$. Этот вектор перпендикулярен к осям l и m, а его длина равна удвоенному расстоянию между осями.

Отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M переходит в такую точку M_1, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ равен данному вектору $\vec{a}$, называется <u>параллельным переносом</u> на вектор $\vec{a}$.

2 Обозначим буквой O точку пересечения прямых l и m и выберем на этих прямых точки A и B так, чтобы угол AOB не был тупым (рис. 71).

Поскольку при каждой из симметрий с осями l и m точка O остаётся на месте, то она остаётся на месте и в результате последовательного выполнения этих симметрий.

При симметрии относительно прямой l точка A останется на месте, а при симметрии относительно прямой m она перейдёт в такую точку A_1, что

$$OA_1 = OA \text{ и } \angle AOA_1 = 2\angle AOB.$$

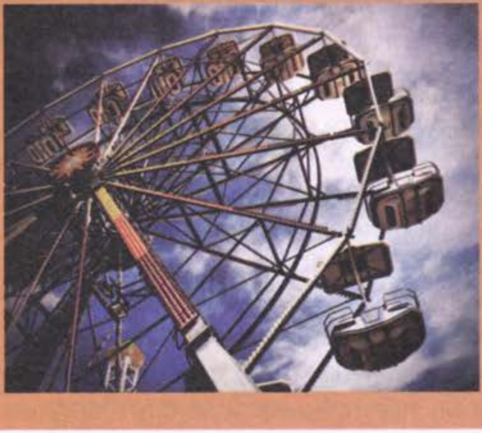
Возьмём теперь любую точку M, не лежащую на луче OA. В результате последовательного выполнения двух осевых симметрий она перейдёт в такую точку M_1, что

$$OM_1 = OM \text{ и } \angle A_1OM_1 = \angle AOM,$$

причём ориентация этих углов одинаковая. Следовательно, угол MOM_1 также равен $2\angle AOB$ (докажите это).

Таким образом, в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий точка O осталась на месте, а произвольная точка M перешла в такую точку M_1, что $OM_1 = OM$ и $\angle MOM_1 = 2\angle AOB$. Кроме того, направление поворота вокруг точки O от OM к OM_1 такое же, как от OA к OB (на рисунке 71 против часовой стрелки).

Это движение называется поворотом вокруг точки O на угол, равный $2\angle AOB$. В частности, если $\angle AOB = 90°$, то в результате последовательного выполнения указанных симметрий получится поворот вокруг точки O на 180°, т. е. движение, сопоставляющее каждой точке M плоскости такую точку, которая симметрична точке M относительно точки O. Такое движение называется центральной симметрией, а точка O — центром симметрии.



99 Центральное подобие

Пусть O — данная точка, k — данное число, отличное от нуля. Центральным подобием (или гомотетией) с центром O и коэффициентом k называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M переходит в такую точку M_1, что $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$. Сформулируем утверждение об основном свойстве центрального подобия.

■ **Если при центральном подобии с центром O и коэффициентом k точки A и B переходят в точки A_1 и B_1, то $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$.**

В самом деле (рис. 72),

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}.$$

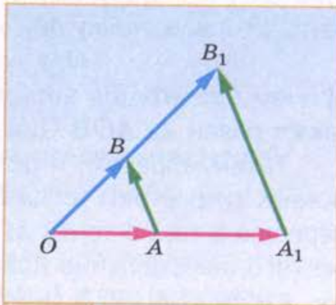


Рис. 72

Пользуясь этим утверждением, можно доказать, что

■ **при центральном подобии с коэффициентом k отрезок длины a отображается на отрезок длины $|k|a$, луч отображается на луч, прямая — на прямую, окружность с центром C радиуса r — на окружность с центром C_1 радиуса $|k|r$, где C_1 — точка, в которую переходит точка C.**

Докажем, например, последнее из этих утверждений (остальные утверждения докажите самостоятельно).

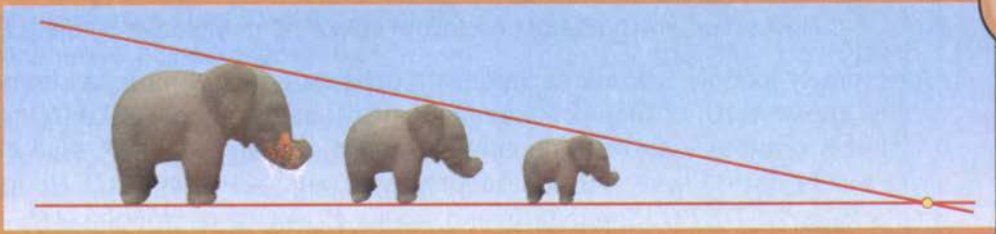
Пусть при рассматриваемом центральном подобии точка A, лежащая на окружности с центром C радиуса r, переходит в точку A_1. Тогда

$$C_1A_1 = |\overrightarrow{C_1A_1}| = |k\overrightarrow{CA}| = |k|CA = |k|r,$$

т. е. точка A_1 лежит на окружности с центром C_1 радиуса $|k|r$. Таким образом, любая точка окружности с центром C радиуса r переходит в некоторую точку окружности с центром C_1 радиуса $|k|r$.

И наоборот, в любую точку A_1 окружности с центром C_1 радиуса $|k|r$ переходит некоторая точка A окружности с центром C радиуса r (а именно, точка A, для которой $k\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{C_1A_1}$).

Рассмотрим теперь произвольный треугольник ABC. При центральном подобии он отображается на треугольник $A_1B_1C_1$, стороны



Гомотетия — от греческих ὁμός [омос] — одинаковый и θετος [тетос] — расположенный.

которого пропорциональны сторонам треугольника ABC. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, поэтому их углы соответственно равны. Тем самым мы обнаружили ещё одно важное свойство:

- **центральное подобие сохраняет величины углов.**

Воспользуемся центральным подобием для решения следующей задачи на построение.

Задача

В данный остроугольный треугольник ABC вписать квадрат так, чтобы две вершины квадрата лежали на стороне AB и ещё по одной — на сторонах AC и BC.

Решение

Из произвольной точки L стороны AC треугольника ABC проведём перпендикуляр LK к прямой AB и построим квадрат $KLMN$ так, как показано на рисунке 73, *а*.

Далее, построим прямую AM, обозначим буквой F точку её пересечения со стороной BC и проведём перпендикуляр FG к прямой AB.

Наконец, построим квадрат $DEFG$ (рис. 73, *б*). Вершина F этого квадрата лежит на стороне BC, вершины D и G — на стороне AB.

Докажем, что квадрат $DEFG$ получается из квадрата $KLMN$ при центральном подобии с центром A.

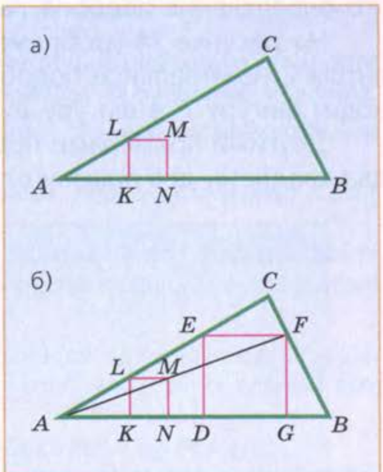


Рис. 73

Рассмотрим центральное подобие с центром A и коэффициентом $k = \frac{AF}{AM}$. При этом центральном подобии точка M переходит в точку F. А поскольку любой отрезок переходит в отрезок с длиной в k раз большей и, кроме того, сохраняются величины углов, то квадрат $KLMN$ переходит в квадрат, одной из вершин которого является точка F, ещё две вершины лежат на луче AB, а четвёртая вершина — на луче AC. Но это и есть квадрат $DEFG$. Следовательно, точка E лежит на стороне AC, т. е. квадрат $DEFG$ искомый. ▲

100 О подобии произвольных фигур

Центральное подобие является частным случаем так называемого преобразования подобия. Преобразованием подобия с коэффициентом $k > 0$ называется отображение плоскости на себя, при котором любые две точки A и B переходят в такие точки A_1 и B_1, что $A_1B_1 = kAB$. Примерами преобразования подобия являются движение (при этом $k = 1$), центральное подобие, а также результат их последовательного выполнения.

Преобразование подобия часто используется в геометрии. С его помощью можно ввести понятие подобия произвольных фигур:

- **две фигуры называются подобными с коэффициентом k, если существует такое преобразование подобия с коэффициентом k, при котором одна из них переходит в другую.**

Можно доказать (задача 68), что применительно к треугольникам это определение подобия равносильно определению из п. 78.

На рисунке 74 изображены фигуры F и F_1, подобные с коэффициентом 2 (центральное подобие с центром O и коэффициентом 2 переводит фигуру F в фигуру F_1).

Другими примерами подобных фигур являются две окружности, два квадрата, два прямоугольника, смежные стороны которых образуют

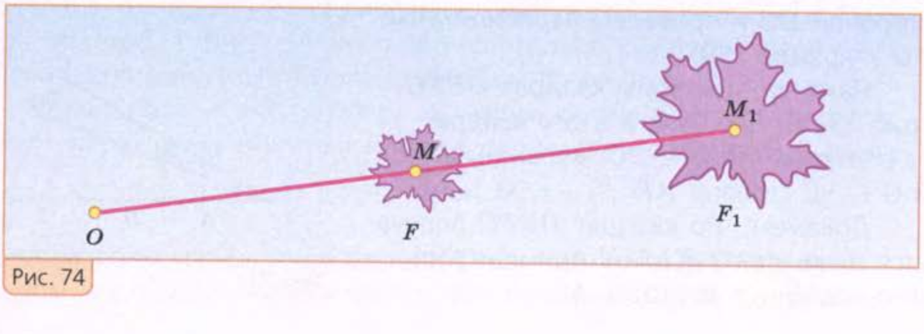


Рис. 74

золотое сечение, две географические карты одного и того же района, выполненные в разных масштабах.

Каждой точке M на первой карте соответствует точка M_1 на второй карте, изображающая ту же самую точку на местности, что и точка M на первой карте. При этом расстояние между любыми двумя точками на первой карте в определённое число раз больше (или меньше), чем расстояние между соответствующими им точками на второй карте. Так, например, на рисунке 75

$$\frac{LM}{L_1M_1} = \frac{MN}{M_1N_1} = \frac{NL}{N_1L_1} = 1{,}5$$

(масштаб первой карты в 1,5 раза крупнее, чем масштаб второй карты).

Рис. 75

Вопросы и задачи

23. а) Постройте фигуру, на которую отображается данный треугольник при симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису одного из его внешних углов.

б) Докажите, что при осевой симметрии прямая, параллельная оси, отображается на прямую, параллельную оси.

в) Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. На прямой a постройте точку M, для которой сумма $MA + MB$ принимает наименьшее значение.

24. а) Постройте фигуру, на которую отображается данный четырёхугольник при симметрии относительно данной оси.

б) Докажите, что при осевой симметрии прямая, перпендикулярная к оси, отображается на себя.

в) Точка A лежит внутри острого угла. На сторонах этого угла постройте точки B и C так, чтобы периметр треугольника ABC принимал наименьшее значение.

25. а) Докажите, что при движении отрезок отображается на равный ему отрезок.

б) Докажите, что при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

в) Докажите, что при движении прямая отображается на прямую.

г) Докажите, что при движении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

26. а) Докажите, что при движении окружность отображается на окружность того же радиуса.

б) Докажите, что при движении луч отображается на луч.

в) Докажите, что при движении угол отображается на равный ему угол.

г) Докажите, что при движении параллелограмм отображается на параллелограмм.

27. а) На медиане BD треугольника ABC отмечены точки M и N. Постройте фигуру, на которую отображается треугольник ABC при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$.

б) На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ построены квадраты — один извне, другой изнутри. Докажите, что отрезок, соединяющий центры этих квадратов, равен и параллелен стороне AD.

в) Докажите, что равносторонний треугольник при повороте на 120° вокруг своего центра отображается на себя.

г) На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC отмечены точки L, M и N так, что $LM \parallel AC$ и $MN \parallel AB$. Докажите, что точка M и середины отрезков BN и CL являются вершинами равностороннего треугольника.

д) Постройте фигуру, на которую отображается данный треугольник при центральной симметрии относительно данной точки.

28. а) Даны вектор $\overrightarrow{AB}$ и точка M, не лежащая на прямой AB. Используя только циркуль (и не используя линейку), постройте точку M_1, в которую переходит точка M при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$.

б) Постройте трапецию по её основаниям и диагоналям.

в) Докажите, что правильный шестиугольник при повороте на 120° вокруг своего центра отображается на себя.

г) В окружность вписаны равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, вершины которых обозначены так, что направление обхода по дуге ABC от точки A к точке C совпадает с направлением обхода по дуге $A_1B_1C_1$ от точки A_1 к точке C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо проходят через центр окружности, либо, пересекаясь, образуют равносторонний треугольник.

д) На одной из сторон данного параллелограмма отмечена точка. Используя только линейку, постройте точку, симметричную этой точке относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма.

29. а) Постройте треугольник, который отображается на данный треугольник при центральном подобии с данным центром и коэффициентом 2.

б) Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M, точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков A_1M, B_1M и C_1M. Используя центральное подобие, докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

в) Докажите, что если стороны двух неравных треугольников соответственно параллельны, то существует такое центральное подобие, при котором один из них отображается на другой.

30. а) Постройте фигуру, на которую отображается данный параллелограмм при центральном подобии с центром в точке пересечения его диагоналей и коэффициентом $\frac{1}{3}$.

б) Используя центральное подобие, докажите, что точка пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC, центр вписанной в треугольник окружности и центр окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, лежат на одной прямой.

в) Докажите, что для любых двух окружностей существует такое центральное подобие, при котором одна из них переходит в другую.

Вопросы для повторения

1. Объясните, что такое ось координат, начало координат, положительная полуось, отрицательная полуось.

2. Что называется координатой точки, лежащей на оси координат?

3. Докажите, что координата середины отрезка, лежащего на оси координат, равна полусумме координат концов этого отрезка.

4. Объясните, как вводится прямоугольная (декартова) система координат. Как называются оси координат?

5. Объясните, как определяются координаты точки в заданной прямоугольной системе координат. Как называются координаты точки?

6. Докажите, что каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат концов этого отрезка.

7. Приведите примеры векторных величин, известных вам из курса физики.

8. Дайте определение вектора. Как обозначаются векторы?

9. Какой вектор называется противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$?

10. Объясните, какой вектор называется нулевым.

11. Что называется длиной вектора? Чему равна длина нулевого вектора?

12. Какие векторы называются равными?

13. Что называется координатами вектора в прямоугольной системе координат?

14. Сформулируйте и докажите теорему о координатах равных векторов.

15. Объясните смысл выражения: «Вектор $\vec{a}$ отложен от точки M». Докажите, что от любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

16. Докажите, что длина вектора равна корню из суммы квадратов его координат.

17. Выведите формулу, выражающую расстояние между двумя точками через координаты этих точек.

18. Объясните, что означают слова: «Угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α».

19. Выведите формулу, выражающую косинус угла между ненулевыми векторами через их координаты.

20. Какие два вектора называются перпендикулярными? Выведите формулу, выражающую условие перпендикулярности двух ненулевых векторов с координатами $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$.

21. Какое равенство называется уравнением данной линии в заданной прямоугольной системе координат?

22. Выведите уравнение окружности данного радиуса с центром в данной точке.

23. Выведите уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно к ненулевому вектору $\vec{n}\{a; b\}$.

24. Какое число называется угловым коэффициентом прямой в данной системе координат? Докажите, что если угловые коэффициенты двух прямых различны, то эти прямые пересекаются, а если одинаковы, то прямые параллельны.

25. Выведите уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

26. Объясните, какой вектор называется суммой двух векторов. В чём заключается правило треугольника сложения двух векторов?

27. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливы равенства: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$; $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

28. Докажите, что каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

29. Какой вектор называется разностью двух векторов? Как выражаются координаты разности двух векторов через координаты этих векторов?

30. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах сложения векторов.

31. Какие векторы называются коллинеарными? В чём заключается правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов?

32. В чём заключается правило многоугольника сложения нескольких векторов?

33. Какой вектор называется произведением данного ненулевого вектора на данное число, отличное от нуля?

34. Чему равно произведение $k\vec{a}$, если: а) $\vec{a} = \vec{0}$; б) $k = 0$?

35. Докажите, что каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

36. Сформулируйте и докажите утверждение о свойствах умножения вектора на число.

37. Что называется скалярным произведением двух векторов?

38. Что такое скалярный квадрат вектора? Чему он равен?

39. Выведите формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты.

40. Докажите, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

41. В каком случае скалярное произведение двух ненулевых векторов положительно (отрицательно)?

42. Сформулируйте и докажите утверждение о свойствах скалярного произведения векторов.

43. Что означают слова: «вектор $\vec{c}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$»? Что такое коэффициенты разложения?

44. Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то любой вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причём коэффициенты этого разложения определяются единственным образом.

45. Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

46. Объясните, что такое отображение плоскости на себя.

47. Какое отображение плоскости на себя называется осевой симметрией? Какая прямая при этом называется осью симметрии?

48. Докажите, что при осевой симметрии сохраняются расстояния между точками.

49. Что означают слова «осевая симметрия сохраняет величину угла, но меняет его ориентацию»?

50. Какое отображение плоскости на себя называется движением?

51. Какое отображение плоскости на себя называется параллельным переносом на данный вектор?

52. Объясните, какое отображение плоскости на себя называется поворотом вокруг данной точки на данный угол? Какое отображение плоскости на себя называется центральной симметрией? Какая точка при этом называется центром симметрии?

53. Какое отображение плоскости на себя называется центральным подобием (гомотетией)?

54. Какое отображение плоскости на себя называется преобразованием подобия? Какие фигуры называются подобными?

Дополнительные задачи

§ 19

31. Четырёхугольники $ABCD$ и A_1BC_1D — параллелограммы. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_1C}$.

32. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общую медиану AM. Докажите, что $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{C_1B}$.

33. Напишите уравнение окружности с центром на оси ординат, проходящей через точки $A\,(3;\,8)$ и $B\,(-4;\,1)$.

34. Является ли отрезок с концами $A\,(-3;\,4)$ и $B\,(-7;\,-4)$ диаметром окружности $(x+5)^2+y^2=20$?

35. Напишите уравнение окружности, вписанной в треугольник с вершинами $A\,(-3;\,-1)$, $B\,(1;\,2)$, $C\,(5;\,-1)$.

36. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин описанного около неё квадрата есть величина постоянная.

37. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин вписанного в неё квадрата есть величина постоянная.

38. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M плоскости, для каждой из которых $AM^2+BM^2=k^2$, где k — данное число.

39. Три вершины параллелограмма $ABCD$ имеют координаты: $A\,(2;\,-3)$, $B\,(2;\,1)$, $C\,(-2;\,3)$. Напишите уравнение прямой BD.

40. Прямая $y+2x-1=0$ пересекает ось Oy в точке A. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно к данной прямой.

41. Медианы треугольника с вершинами $A\,(5;\,1)$, $B\,(-7;\,4)$ и C пересекаются в точке $G\,(-2;\,3)$. Напишите уравнение прямой CG и найдите координаты точки C.

42. Выясните взаимное расположение прямой $x+y-3=0$ и окружности $x^2+y^2=4$.

43. Центр окружности расположен в начале координат, её хорда, лежащая на прямой $4y+3x-12=0$, равна 2. Напишите уравнение этой окружности.

§ 20

44. Может ли длина суммы: а) нескольких ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов; б) двух ненулевых векторов быть равной длине разности этих векторов?

45. Докажите, что векторы $\vec{a}\,\{x_1;\,y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\,y_2\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $x_1y_2=x_2y_1$.

46. Векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

47. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

48. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке P. Докажите, что для любой точки M имеет место равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MP}$.

49. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство: а) $1\vec{a} = \vec{a}$; б) $(-1)\,\vec{a} = -\vec{a}$.

50. Докажите, что если $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, то точки A и B симметричны относительно точки O.

51. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB \parallel DE \parallel CF$, $BC \parallel EF \parallel AD$, $CD \parallel FA$. Используя векторы, докажите, что $BE \parallel AF$.

52. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1. Используя векторы, докажите, что либо существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, либо один из этих отрезков равен сумме двух других.

53. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен их полуразности.

54. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырёхугольника, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

55. Отрезки AB и CD — хорды окружности с центром O. Прямые AB и CD взаимно перпендикулярны, M — точка их пересечения. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}$.

56. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 5$ и $BC = 3$ угол A прямой. Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

57. Разность оснований AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ равна m. Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

58. Докажите, что если $AC^2 + BC^2 = \frac{1}{2}AB^2$, то $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 0$.

59. Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что меньшая боковая сторона есть среднее геометрическое оснований.

60. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D, прямая CD перпендикулярна к медиане AM, $AD : DB = 3 : 1$, $AC = 3$, $\angle C = 60°$. Найдите BC.

61. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

62. Отрезок AM — медиана треугольника ABC. Докажите справедливость равенства $4AM^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$.

63*. Используя параллельный перенос, докажите, что углы при основании равнобедренной трапеции равны.

64*. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ABE. Через точки C и D проведены прямые, перпендикулярные соответственно к прямым EA и EB и пересекающиеся в точке F. Используя параллельный перенос, докажите, что $EF \perp AB$.

65*. Даны точки A и B и прямая a, пересекающая отрезок AB, причём прямые a и AB не перпендикулярны. Постройте треугольник ABC, биссектриса угла C которого лежит на прямой a.

66*. Даны параллельные прямые b и c и точка A, не лежащая на них. Используя поворот, постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы точки B и C лежали соответственно на прямых b и c. Сколько решений имеет эта задача?

67*. Докажите, что любое преобразование подобия можно представить как последовательное выполнение центрального подобия и движения.

68*. Докажите, что применительно к треугольникам общее определение подобия фигур (п. 100) равносильно определению, данному в п. 78, т. е. если два треугольника подобны по общему определению, то они подобны и по определению из п. 78, и наоборот.

Глава 8

Площадь

Каждому из нас знакомы такие слова: «площадь комнаты равна 16 квадратным метрам», «площадь садового участка — 6 соток». В этой главе речь пойдёт о том, как измеряются площади геометрических фигур, будут выведены формулы, по которым можно вычислить площади прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции, круга. Некоторые из этих формул вы уже знаете. Например, вам известна формула площади прямоугольника. Но здесь мы дадим обоснование этой и ряда других формул. Все эти формулы широко используются не только при решении геометрических задач, но и в обыденной практике, при различных расчётах, связанных с техникой, производством, конструированием.

§ 22 Площадь многоугольника

101 Равносоставленные многоугольники

Если один многоугольник разрезан на части и из них составлен другой многоугольник (так, что внутренние области любых двух частей не имеют общих точек), то исходный и полученный многоугольники называются равносоставленными. Например, квадрат со стороной 1 и равнобедренный прямоугольный треугольник с основанием 2 являются равносоставленными (рис. 76).

Приведём ещё два примера равносоставленных многоугольников.

Рассмотрим четырёхугольник, изображённый на рисунке 77, *а*. Он составлен из двух прямоугольных треугольников с катетами a и b. Из таких же двух треугольников составлен прямоугольник, смежные стороны которого равны a и b (рис. 77, *б*). Следовательно, указанные четырёхугольник и прямоугольник равносоставлены.

Обратимся теперь к рисунку 78, *а*, на котором окружность радиуса r с центром O вписана в треугольник ABC и равные отрезки касательных обозначены буквами x, y и z. Треугольник ABC составлен из шести попарно равных прямоугольных треугольников с катетами x и r, y и r, z и r. Из таких же треугольников составлен прямоугольник, смежные стороны которого равны r и $x+y+z$ (рис. 78, *б*). Следовательно, треугольник ABC и указанный прямоугольник равносоставлены.

Поскольку

$$AB + BC + CA = (x+y) + (y+z) + (z+x) = 2(x+y+z),$$

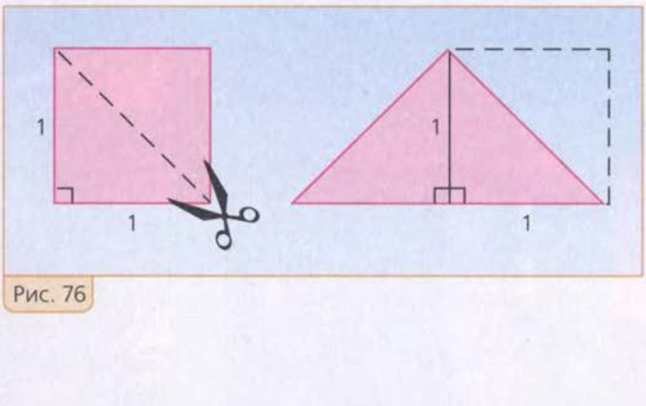


Рис. 76

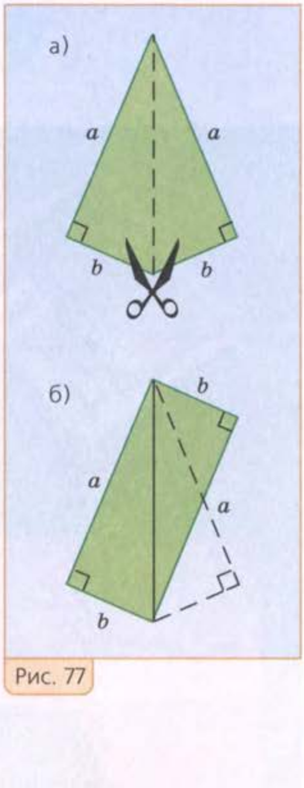


Рис. 77

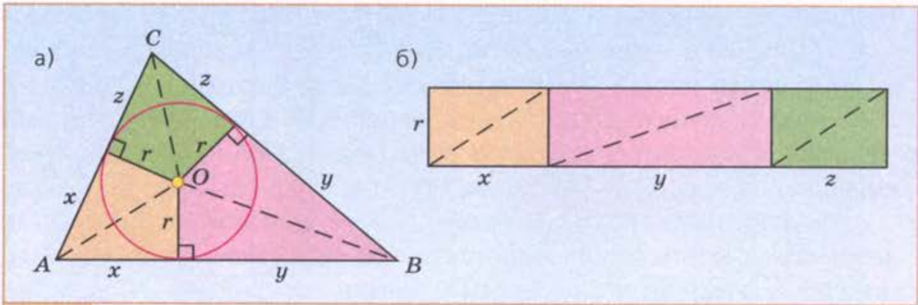


Рис. 78

то сумма $x + y + z$ равна половине периметра треугольника ABC. Таким образом,

- **треугольник равносоставлен с прямоугольником, одна из смежных сторон которого равна половине периметра треугольника, а другая — радиусу вписанной в него окружности.**

102 Площадь многоугольника

С понятием площади мы часто встречаемся в повседневной жизни. Например, каждый из нас понимает, что означают слова «площадь квартиры равна пятидесяти шести квадратным метрам».

В геометрии под площадью многоугольника понимается величина занимаемой им части плоскости. Измерение площади многоугольника основано на его сравнении с многоугольником, принятым за единицу измерения площадей. В качестве такой единицы измерения обычно используют квадрат со стороной, равной единице измерения отрезков. Например, если за единицу измерения отрезков принят сантиметр, то за единицу измерения площадей принимают квадрат со стороной 1 см. Этот квадрат называют квадратным сантиметром и обозначают так: см^2. Аналогично определяются квадратный метр (м^2), квадратный миллиметр (мм^2) и т. д.

Чтобы измерить площадь многоугольника, нужно узнать, сколько раз единица измерения площадей и её части укладываются в данном многоугольнике. Это число и принимается за площадь многоугольника при данной единице измерения.

На практике измерение площади многоугольника можно осуществить так. Расчертим лист прозрачной бумаги на квадраты со стороной, равной

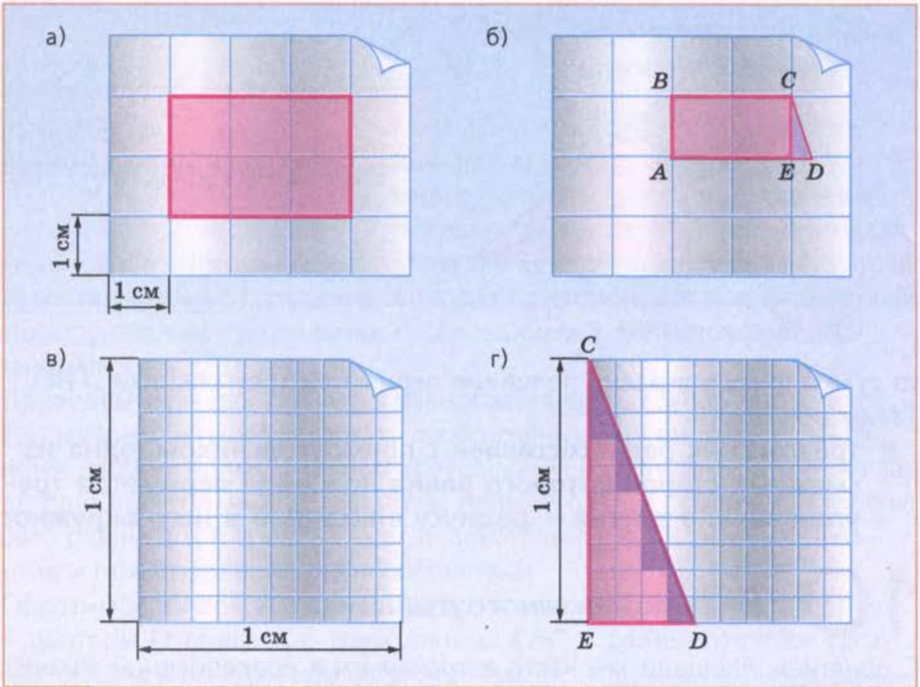


Рис. 79

единице измерения отрезков, наложим его на данный многоугольник и подсчитаем, сколько квадратов уложится в многоугольнике.

Обратимся к рисунку 79, *а*. На нём изображён прямоугольник, в котором квадратный сантиметр укладывается ровно 6 раз, поэтому площадь этого прямоугольника равна 6 см^2.

Ясно, что квадрат, принятый за единицу измерения площадей, может не уложиться целое число раз в данном многоугольнике — получится остаток. Так будет, например, с трапецией $ABCD$ на рисунке 79, *б*, в которой квадратный сантиметр укладывается 2 раза с остатком (треугольник CDE), но не укладывается 3 раза. В этом случае можно сказать, что площадь трапеции $ABCD$ приближённо равна 2 см^2.

Для получения более точного результата единицу измерения площади делят на 100 равных частей (рис. 79, *в*) и находят, сколько раз одна такая часть укладывается в остатке. Глядя на рисунок 79, *г* (он, как и рисунок 79, *в*, выполнен в увеличенном масштабе), мы видим, что одна сотая часть квадратного сантиметра (квадратный миллиметр) укладывается в треугольнике CDE 14 раз с остатком (на рисунке 79, *г* остаток закрашен сиреневым цветом), в котором квадратный миллиметр не укладывается целиком. Поэтому в качестве следующего приближения площади трапеции $ABCD$ можно взять 2,14 см^2.

Остаток измеряется с помощью более мелкой доли квадратного сантиметра и получается ещё более точное приближение. И хотя на практике пользуются приближёнными значениями площадей, мысленно процесс измерения площади можно продолжать всё дальше и дальше. Таким образом, описанный процесс измерения позволяет выразить площадь данного многоугольника некоторым положительным числом, показывающим, сколько раз единица измерения и её части укладываются в этом многоугольнике.

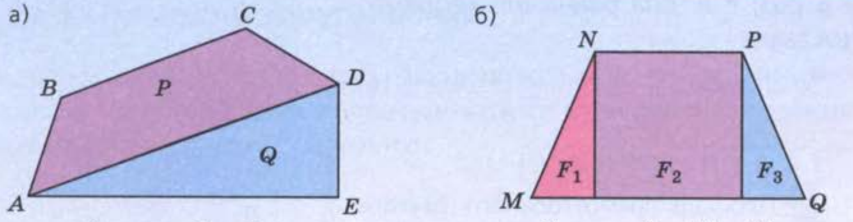
Говоря о площади квартиры, мы подразумеваем, в частности, что одинаковые квартиры имеют одну и ту же площадь, а сама площадь квартиры равна сумме площадей её комнат и подсобных помещений. Применительно к многоугольникам это означает, что:

1. **равные многоугольники имеют равные площади;**

2. **если многоугольник составлен из нескольких многоугольников** (так, что внутренние области любых двух из них не имеют общих точек, см. рис. 80), **то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.**

Утверждения 1 и 2 выражают основные свойства площадей. Они представляются наглядно очевидными, но доказать их непросто (см. [2]).

Два многоугольника называются равновеликими, если их площади равны. В силу основных свойств площадей любые два равносоставленных многоугольника равновелики. А верно ли обратное утверждение: любые два равновеликих многоугольника равносоставлены? Оказывается, верно. Это утверждение называется теоремой Бойяи — Гервина. Ф. Бойяи (венгерский математик) доказал эту теорему в 1832 г., а П. Гервин (немецкий математик-любитель) независимо от Ф. Бойяи доказал её в 1833 г. Доказательство теоремы Бойяи — Гервина можно найти, например, в [2].



$S_{ABCDE} = S_P + S_Q$

$S_{MNPQ} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

Рис. 80

103 Площадь прямоугольника

ТЕОРЕМА

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Доказательство. Докажем, что площадь прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = a$ и $AD = b$ равна ab.

Рассмотрим сначала прямоугольник AB_1C_1D, сторона AB_1 которого равна единице измерения отрезков (рис. 81, *а*). Ясно, что единица измерения площадей (т. е. квадрат со стороной 1) и её части (прямоугольники с двумя сторонами, равными AB_1, и двумя другими сторонами, равными $\frac{1}{10}AD_1$, $\frac{1}{100}AD_1$ и т. д.) укладываются в прямоугольнике AB_1C_1D столько раз, сколько раз единица измерения отрезков (отрезок AD_1) и её части $\left(\frac{1}{10}AD_1, \frac{1}{100}AD_1 \text{ и т. д.}\right)$ укладываются в отрезке AD, т. е. b раз. Следовательно, площадь этого прямоугольника выражается числом b.

Аналогично прямоугольник AB_1C_1D и его части укладываются в прямоугольнике $ABCD$ столько раз, сколько раз единица измерения отрезков (отрезок AB_1) и её части укладываются в отрезке AB (рис. 81, *б*), т. е. a раз. Следовательно, площадь прямоугольника $ABCD$ отличается от площади прямоугольника AB_1C_1D в a раз, т. е. она равна ab. Теорема доказана.

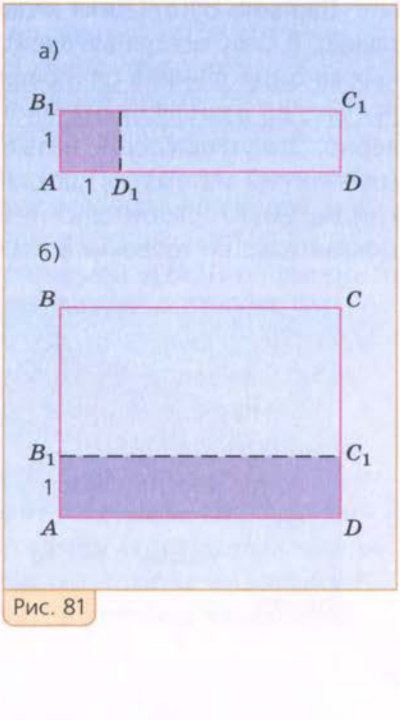


Рис. 81

СЛЕДСТВИЕ 1

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

В самом деле, рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами, равными a и b (рис. 82, *а*), а также прямоугольник, смежные стороны которого равны a и b (рис. 82, *б*).

Диагональ этого прямоугольника разделяет его на два прямоугольных треугольника, каждый из которых равен данному по двум катетам. Следовательно, площадь данного треугольника равна половине площади прямоугольника, т. е. равна $\frac{1}{2}ab$.

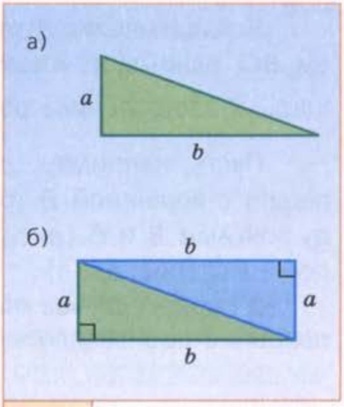


Рис. 82

СЛЕДСТВИЕ 2

Площадь треугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной в него окружности: $S = pr$, где p — половина периметра треугольника, r — радиус вписанной окружности.

Это следует из утверждения о равносоставленности треугольника и прямоугольника, п. 101.

Если два многоугольника подобны с коэффициентом k (см. п. 100), то квадрат со стороной, равной 1, укладывается в одном из них столько раз, сколько раз квадрат со стороной, равной k, укладывается в другом. Поскольку площадь квадрата со стороной, равной k, равна k^2, то можно сделать вывод:

- **отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.**

104 Площадь треугольника

Условимся одну из сторон треугольника называть основанием, а под словом «высота» будем подразумевать ту из высот треугольника, которая проведена к этому основанию.

ТЕОРЕМА

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC с основанием BC, равным a, и высотой AH, равной h. Докажем, что площадь S треугольника равна $\frac{1}{2}a \cdot h$.

Пусть, например, $\angle B \geqslant \angle C$. Возможны три случая: точка H совпадает с вершиной B треугольника (рис. 83, *а*); точка H лежит между точками B и C (рис. 83, *б*); точка H лежит на продолжении стороны BC (рис. 83, *в*).

В первом случае площадь S треугольника ABC равна половине произведения его катетов, т. е.

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h;$$

во втором случае

$$S = \frac{1}{2}CH \cdot h + \frac{1}{2}BH \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot h;$$

в третьем случае

$$S = \frac{1}{2}CH \cdot h - \frac{1}{2}BH \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot h.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон, умноженного на синус угла между этими сторонами.

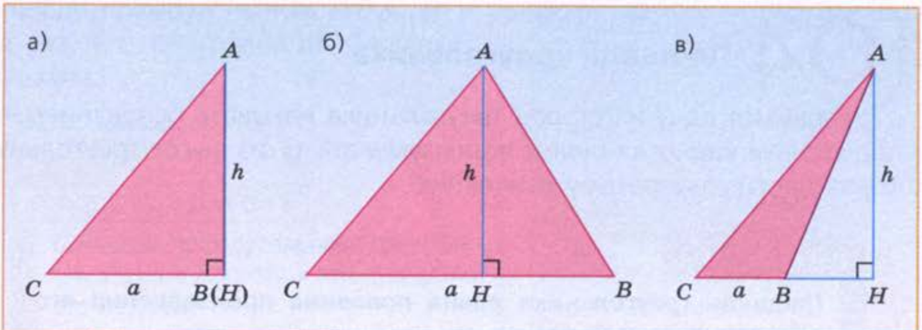


Рис. 83

В самом деле, поскольку высота AH треугольника ABC равна $AB \sin B$ (используя рисунок 83, докажите это), то $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$.

105 Площадь параллелограмма

Условимся одну из сторон параллелограмма называть основанием, а перпендикуляр, проведённый из любой точки противоположной стороны к прямой, содержащей основание, — высотой параллелограмма.

ТЕОРЕМА

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ с площадью S, примем его сторону AD за основание и проведём высоту BH (рис. 84).

Диагональ BD разделяет параллелограмм на равные треугольники ABD и BCD, поэтому величина S вдвое больше площади треугольника ABD, равной $\frac{1}{2} AD \cdot BH$, т. е. $S = AD \cdot BH$.

Теорема доказана.

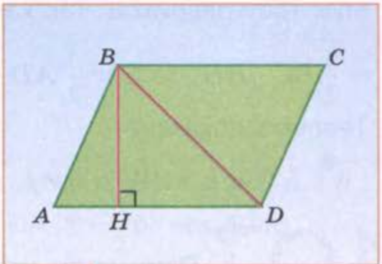


Рис. 84

В качестве следствия из доказанной теоремы получаем следующее утверждение:

- **площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон, умноженному на синус угла между сторонами.**

В самом деле, в ходе доказательства теоремы мы установили, что величина S вдвое больше площади треугольника ABD (см. рис. 84), равной $\frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin A$, т. е.

$$S = AB \cdot AD \sin A.$$

106 Площадь трапеции

Высотой трапеции называется перпендикуляр, проведённый из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание.

ТЕОРЕМА

Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, высотой BH и площадью S. Докажем, что $S = \frac{1}{2}(AD + BC)BH$ (рис. 85).

Диагональ BD разделяет трапецию на треугольники ABD и BCD, поэтому площадь S равна сумме площадей S_{ABD} и S_{BCD} этих треугольников. Так как $S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH$, $S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DH_1 = \frac{1}{2}BC \cdot BH$, то $S = \frac{1}{2}AD \cdot BH + \frac{1}{2}BC \cdot BH = \frac{1}{2}(AD + BC)BH$. Теорема доказана.

107 Площадь четырёхугольника*

ТЕОРЕМА

Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей, умноженного на синус угла между содержащими их прямыми.

Доказательство. Докажем теорему для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ (случай невыпуклого четырёхугольника рассмотрите самостоятельно).

Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника, $\angle AOB = \alpha$ (рис. 86). Четырёхугольник $ABCD$ составлен из треугольников OAB, OBC, OCD и ODA, поэтому его площадь S равна сумме площадей этих треугольников.

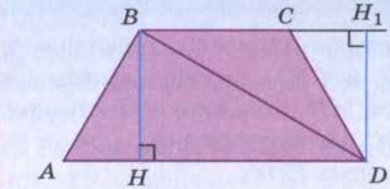


Рис. 85

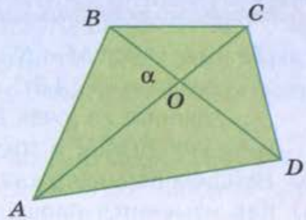


Рис. 86

Учитывая, что $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, получаем:

$$S = \frac{1}{2}(OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA)\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}[OB\,(OA + OC) + OD\,(OC + OA)]\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(OA + OC)(OB + OD)\sin\alpha = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\alpha.$$

Теорема доказана.

108 Формула Герона

Рассмотрим треугольник ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. Выразим его площадь S через a, b и c. Так как $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, то достаточно выразить $\sin A$ через a, b и c. Из теоремы косинусов следует, что $\cos A = \frac{1}{2bc}(b^2 + c^2 - a^2)$. Учитывая, что $\sin A > 0$, из основного тригонометрического тождества находим:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{2bc}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}.$$

Подкоренное выражение можно разложить на множители:

$$(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) =$$
$$= (b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c) =$$
$$= 2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c),$$

где $p = \frac{a + b + c}{2}$ — полупериметр треугольника. Таким образом,

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Эту формулу связывают с именем древнегреческого математика и инженера Герона Александрийского (ок. I в. н. э.).

Вопросы и задачи

69. а) Точки M и N — середины сторон AB и AC остроугольного треугольника ABC, отрезки BH и CK — перпендикуляры, проведённые из точек B и C к прямой MN. Докажите, что четырёхугольник $BCKH$ и треугольник ABC равносоставлены.

б) Найдите периметр квадрата с площадью 25 м^2.

в) Как изменится площадь прямоугольника, если: две противоположные стороны увеличить в k раз; все стороны увеличить в k раз; две противоположные стороны увеличить в k раз, а две другие стороны уменьшить в k раз?

г) Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M. Найдите площадь прямоугольника, если $BM = 3$ см и $MC = 4$ см.

д) Найдите стороны прямоугольника с площадью 14 см^2 и периметром 18 см.

е) Квадрат и прямоугольник, отличный от квадрата, имеют одинаковые периметры. Площадь какой из этих фигур больше?

ж) Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, равна половине произведения диагоналей.

70. а) Через вершину B и середину боковой стороны CD трапеции $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямую AD в точке E. Докажите, что трапеция и треугольник ABE равносоставлены.

б) Периметр прямоугольника равен 40 см, а одна из его сторон равна 2 см. Найдите сторону квадрата, равновеликого этому прямоугольнику.

в) Одна из сторон прямоугольника, равновеликого квадрату с периметром 40 см, равна 5 см. Найдите другую сторону прямоугольника.

г) На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Известно, что $MC = 6$ см и $\angle BMC = 60°$. Найдите площадь квадрата.

д) Докажите, что площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали.

е) Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?

ж) Прямые, содержащие диагонали невыпуклого четырёхугольника, взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь этого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей.

71. а) Высота CH треугольника ABC равна 10 см. Найдите высоту, проведённую к стороне AC, если $AB = 12$ см и $AC = 15$ см.

б) Докажите, что медиана треугольника разделяет его на два равновеликих треугольника.

в) Докажите, что если угол одного треугольника равен углу другого, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

г) На стороне AB треугольника ABC с площадью 25 см^2 отмечена точка M так, что $AM : MB = 2 : 3$. Найдите площадь треугольника ACM.

д) Докажите, что сумма расстояний от точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон не зависит от положения этой точки.

е) Расстояние от точки O пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ до прямой AB, содержащей её боковую сторону, равно 6 см. Найдите площадь треугольника COD, если $AB = 5$ см.

ж) Докажите, что площадь треугольника ABC равна $\frac{abc}{4R}$, где $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

з) Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что произведение площадей треугольников AOB и COD равно произведению площадей треугольников AOD и BOC.

72. а) К стороне треугольника, равной 16 см, проведена высота, равная 11 см. Найдите другую сторону, если высота, проведённая к ней, равна 8 см.

б) Докажите, что если отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, разделяет треугольник на два равновеликих треугольника, то этот отрезок — медиана треугольника.

в) Докажите, что если угол одного треугольника составляет в сумме с углом другого 180°, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих указанные углы.

г) Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M, площадь треугольника ABM равна S. Найдите площадь треугольника ABC.

д) Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M. Докажите, что сумма площадей треугольников AMB и CMD не зависит от положения точки M.

е) Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, треугольники AOB и COD равновелики. Докажите, что $AD \parallel BC$.

ж) Докажите, что площадь треугольника ABC равна $2R^2 \sin A \sin B \sin C$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

з) Прямые AC и BD, содержащие диагонали невыпуклого четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точке O. Докажите, что произведение площадей треугольников AOB и COD равно произведению площадей треугольников AOD и BOC.

73. а) Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMND$ и треугольник ABC равновелики.

б) Сравните площади прямоугольника и параллелограмма, отличного от прямоугольника, если стороны прямоугольника соответственно равны сторонам параллелограмма.

в) Отрезок BH — высота параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь этого параллелограмма, если $\angle A = 45°$, $AH = 2$ см и $HD = 3$ см.

г) Докажите, что квадрат площади параллелограмма $ABCD$ равен $AB^2 \cdot AD^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2$.

74. а) Точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольники $ABLN$ и $ADMK$ равновелики.

б) Углы и периметр ромба соответственно равны углам и периметру параллелограмма, отличного от ромба. Сравните площади этих четырёхугольников.

в) Найдите углы параллелограмма с площадью 24 см^2, если его высота, проведённая из вершины, делит основание параллелограмма на отрезки 3 см и 5 см, считая от вершины острого угла.

г) Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна $|x_1y_2 - x_2y_1|$, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ имеют координаты $\{x_1;\ y_1\}$ и $\{x_2;\ y_2\}$.

75. а) Высота равнобедренной трапеции с площадью 60 см^2 и периметром 50 см равна 3 см. Найдите боковую сторону трапеции.

б) Отрезки $AD = 7$ см и $BC = 3$ см — основания трапеции $ABCD$ с площадью 25 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

в) Один из углов равнобедренной трапеции с площадью 12 см^2 равен 45°, а одно из её оснований вдвое больше другого. Найдите высоту трапеции.

г) Меньшая диагональ прямоугольной трапеции с высотой 4 см перпендикулярна к одной из боковых сторон и делит угол между другой боковой стороной и основанием пополам. Найдите площадь трапеции.

д) Диагонали трапеции $ABCD$ с основанием AD пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники ABO и CDO равновелики.

е) Найдите площадь равнобедренной трапеции, высота которой равна h, а диагонали взаимно перпендикулярны.

76. а) Высота прямоугольной трапеции с площадью 50 см^2 и периметром 32 см равна 5 см. Найдите боковые стороны трапеции.

б) В трапеции $ABCD$ с площадью 28 см^2 основание AD равно 9 см, площадь треугольника ABC равна 10 см^2. Найдите BC.

в) Один из углов равнобедренной трапеции равен 45°, а её большее основание и высота равны 5 см и 2 см. Найдите площадь трапеции.

г) Биссектрисы углов A и B трапеции $ABCD$ с основанием AD пересекаются в точке M, $\angle A = 60°$, $AM = m$, средняя линия трапеции равна a. Найдите площадь трапеции.

д) Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основанием AD, если площади треугольников ABC и ABD равны S_1 и S_2.

е) Основания трапеции равны a и b. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный основаниям, разделяет трапецию на две равновеликие трапеции. Найдите длину этого отрезка.

§ 23 Длина окружности и площадь круга

109 Некоторые формулы, связанные с правильными многоугольниками

Чтобы получить формулы для вычисления длины окружности и площади круга, нам понадобятся некоторые формулы, связанные с правильными многоугольниками.

В 8 классе мы доказали, что около правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну, и в правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну (см. «Введение»).

Рассмотрим окружность радиуса R и два правильных n-угольника — вписанный в эту окружность и описанный около неё. Выразим стороны, периметры и площади этих n-угольников через радиус R.

1 Сторона a правильного вписанного n-угольника является основанием равнобедренного треугольника с боковой стороной R и противолежащим основанию углом, равным $\frac{360°}{n}$ (рис. 87, *а*), поэтому $a = 2R\sin\frac{180°}{n}$ (рис. 87, *б*), а периметр P этого n-угольника выражается формулой

$$P = n \cdot a = n \cdot 2R\sin\frac{180°}{n}. \qquad (1)$$

Поскольку рассматриваемый n-угольник составлен из n равнобедренных треугольников, равных треугольнику, изображённому на рисунке 87, *б*, и площадь одного такого треугольника равна $\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}aR\cos\frac{180°}{n}$ (см. рис. 87, *б*), то для площади $S_{вп}$ правильного вписанного n-угольника получаем формулу

$$S_{вп} = n \cdot \frac{1}{2}aR\cos\frac{180°}{n} = \frac{1}{2}PR\cos\frac{180°}{n}. \qquad (2)$$

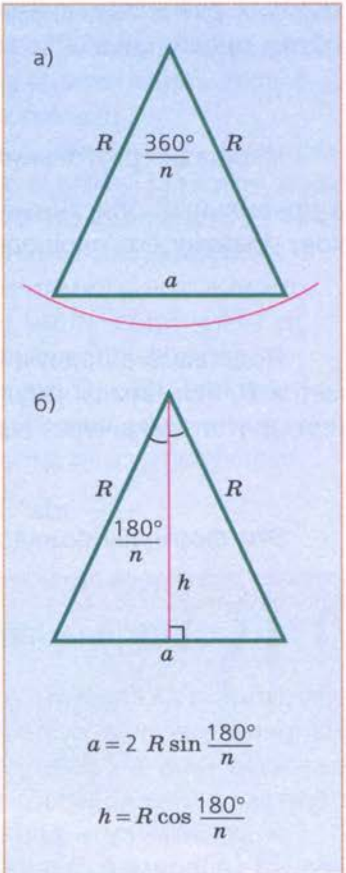


Рис. 87

2 Сторона b правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса R, является основанием равнобедренного треугольника с высотой R и противолежащим основанию углом, равным $\frac{360°}{n}$ (рис. 88), поэтому $b = 2R\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n}$, а периметр Q этого n-угольника выражается формулой

$$Q = n \cdot b = n \cdot 2R\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n}. \qquad (3)$$

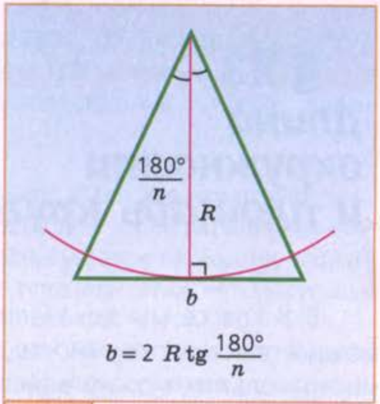


Рис. 88

Сопоставляя формулы (1) и (3), приходим к равенству, связывающему периметры правильных вписанного и описанного n-угольников,

$$P = Q\cos\frac{180°}{n}. \qquad (4)$$

Площадь треугольника, изображённого на рисунке 88, равна $\frac{1}{2}bR$, а правильный описанный n-угольник составлен из n таких треугольников, поэтому его площадь $S_{\text{оп}}$ выражается формулой

$$S_{\text{оп}} = n \cdot \frac{1}{2}bR = \frac{1}{2}QR. \qquad (5)$$

Подставив в правую часть равенства (2) выражение (4) для периметра P, получим формулу, выражающую площадь правильного вписанного n-угольника через периметр Q правильного описанного n-угольника,

$$S_{\text{вп}} = \frac{1}{2}QR\cos^2\frac{180°}{n}. \qquad (6)$$

Эти формулы понадобятся нам в следующих пунктах.

110 Длина окружности

Интуитивно каждый из нас представляет, что такое длина окружности. Например, если окружность сделана из тонкой нерастяжимой нити, то, разрезав нить в какой-нибудь её точке и распрямив её, мы получим отрезок, длина которого равна длине окружности.

А как измерить длину окружности? Если окружность достаточно велика (например, окружность цирковой арены, радиус которой равен 6,5 м), то её длину можно приближённо измерить шагами. Заметим, однако, что при этом измеряется не сама длина окружности, а периметр вписанного в неё правильного многоугольника. Таким образом, периметр правильного вписанного в окружность многоугольника является приближённым значением длины окружности. Это приближение тем точнее, чем больше число сторон многоугольника, так как многоугольник при увеличении числа сторон располагается всё ближе и ближе к окружности (рис. 89).

Воспользуемся этим наблюдением. Рассмотрим квадрат, вписанный в окружность радиуса R. Проведя серединные перпендикуляры к его сторонам и отметив точки их пересечения с описанной окружностью, построим правильный вписанный восьмиугольник (см. рис. 89). Удвоив таким же способом число сторон, получим правильный вписанный шестнадцатиугольник. Продолжив этот процесс, составим последовательность P_n периметров правильных вписанных в данную окружность 2^n-угольников ($n = 2, 3, 4, \ldots$). Каждый член этой последовательности является приближённым значением длины окружности, причём чем больше n, тем точнее приближение.

Можно сказать, что периметр P_n правильного вписанного в окружность 2^n-угольника стремится к точному значению C длины этой окружности при n, стремящемся к бесконечности. Запишем это кратко так: $P_n \to C$ при $n \to \infty$. Иными словами, точное значение длины окружности — это предел, к которому стремится периметр правильного вписанного в окружность 2^n-угольника при неограниченном увеличении числа n.

Выведем формулу, выражающую длину окружности через её радиус. Пусть C и C' — длины окружностей радиусов R и R'. Впишем в каждую из этих окружностей по правильному 2^n-угольнику и обозначим через P_n и P'_n их периметры. Используя формулу (1), получаем:

$$P_n = 2^n \cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{2^n}, \quad P'_n = 2^n \cdot 2R'\sin\frac{180^\circ}{2^n}.$$

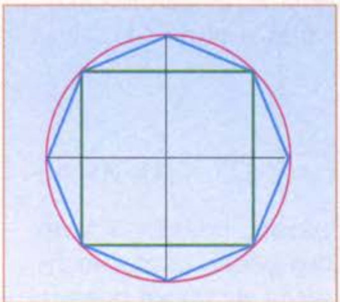
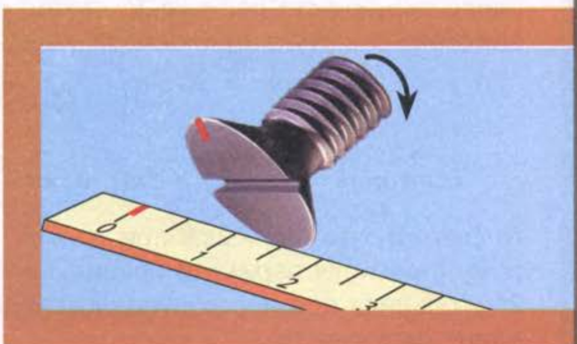


Рис. 89



Следовательно, при любом n

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \quad (7)$$

Будем теперь неограниченно увеличивать число n. Так как $P_n \to C$, $P'_n \to C'$ при $n \to \infty$, то $\frac{P_n}{P'_n} \to \frac{C}{C'}$ при $n \to \infty$. Поэтому, согласно равенству (7), $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$, или $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$, т. е.

- **отношение длины окружности к её диаметру — одно и то же число для всех окружностей.**

Немецкий математик И. Г. Ламберт (1728—1777) и французский математик А. М. Лежандр (1752—1833) доказали (см. [8]), что это число, приближённо равное 3,14 (более точное значение равно 3,1415927), является иррациональным. Его обозначают греческой буквой π (читается «пи») — первой буквой слова περιφερεια (окружность).

Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ получаем формулу для вычисления длины окружности радиуса R:

$$C = 2\pi R.$$

Выведем теперь формулу длины l дуги окружности с градусной мерой α градусов. Поскольку длина всей окружности равна $2\pi R$, то длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Следовательно, длина l выражается формулой

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha.$$

Замечание. Периметр Q_n правильного 2^n-угольника, описанного около окружности радиуса R, связан с периметром P_n правильного вписанного в эту окружность 2^n-угольника равенством вида (4):

$$P_n = Q_n \cos \frac{180°}{2^n}.$$

Если $n \to \infty$, то $P_n \to 2\pi R$, а $\cos \frac{180°}{2^n} \to 1$ (см. с. 123, 124). Из этого следует, что $Q_n \to 2\pi R$ при $n \to \infty$. Таким образом, предел, к которому стремится периметр правильного описанного около окружности 2^n-угольника при неограниченном увеличении числа n, также равен длине окружности.

111 Площадь круга

Выведем формулу площади круга радиуса R. Для этого рассмотрим правильный 2^n-угольник, описанный около окружности, ограничивающей круг (рис. 90, *а*), и правильный 2^n-угольник, вписанный в эту окружность (рис. 90, *б*). Их площади $S_{\text{оп}}$ и $S_{\text{вп}}$ выражаются формулами вида (5) и (6):

$$S_{\text{оп}} = \frac{1}{2} Q_n R,$$

$$S_{\text{вп}} = \frac{1}{2} Q_n R \cos^2 \frac{180^\circ}{2^n},$$

где Q_n — периметр описанного 2^n-угольника.

Площадь S данного круга больше площади $S_{\text{вп}}$, так как вписанный многоугольник содержится в данном круге. С другой стороны, площадь S данного круга меньше площади $S_{\text{оп}}$, так как этот круг содержится в описанном многоугольнике. Таким образом,

$$S_{\text{вп}} < S < S_{\text{оп}},$$

т. е.

$$\frac{1}{2} Q_n R \cos^2 \frac{180^\circ}{2^n} < S < \frac{1}{2} Q_n R. \quad (8)$$

Поскольку $\cos \frac{180^\circ}{2^n} \to 1$ и $Q_n \to 2\pi R$ при $n \to \infty$, то как левая, так и правая часть неравенств (8) стремится к πR^2. Следовательно, средняя часть равна πR^2. Таким образом, площадь S круга радиуса R выражается формулой

$$S = \pi R^2.$$

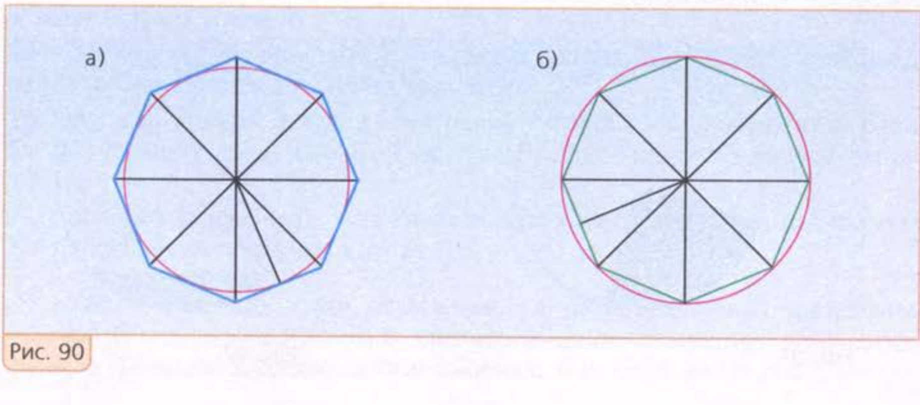


Рис. 90

Сектор — латинское sector от seco (разрезаю, разделяю).

Сегмент — от латинского segmentum (отрезок).

<u>Сектором</u> называется часть круга, ограниченная дугой окружности и двумя радиусами (рис. 91). Поскольку сектор с дугой в 1° составляет $\frac{1}{360}$ часть круга, то его площадь равна $\frac{\pi R^2}{360}$, где R — радиус круга.

Следовательно, площадь сектора с дугой α градусов равна $\frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$.

<u>Сегментом</u> называется часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой (рис. 92). Если дуга меньше 180°, то площадь сегмента можно найти, вычитая из площади сектора площадь треугольника, сторонами которого являются хорда и два радиуса, ограничивающие сектор.

Замечание. В течение ряда веков усилия многих математиков были направлены на решение задачи, получившей название «задача о <u>квадратуре круга</u>»: построить с помощью циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади данного круга. И лишь в 1882 г. немецкий математик К. Л. Линдеман (1852—1939) доказал, что такое построение невозможно.

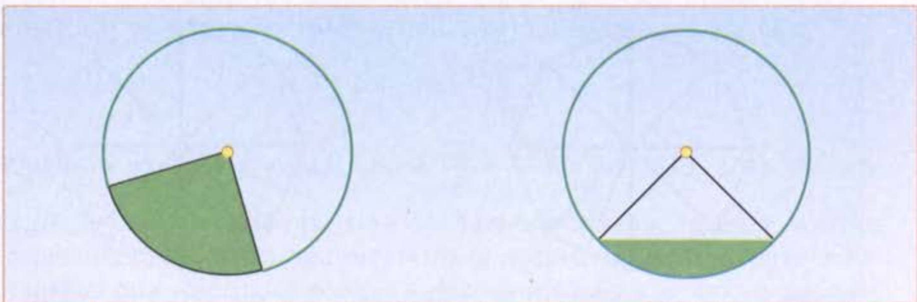


Рис. 91

Рис. 92

Вопросы и задачи

77. а) Как изменится длина окружности, если радиус окружности: увеличить в 3 раза? уменьшить в 2 раза? увеличить в k раз? уменьшить в k раз?

б) Как изменится длина окружности, если радиус окружности увеличить на 1 см?

в) Длина окружности, вписанной в квадрат, равна l. Найдите длину окружности, описанной около этого квадрата.

г) Найдите радиус окружности, длина которой равна длине дуги окружности радиуса 24 см с градусной мерой 30°.

д) На прямой отмечены точки A, B, C и D (в указанном порядке). На окружностях с диаметрами AB, BC, CD и AD отмечены соответственно точки K, L, M и N. Докажите, что путь от точки A до точки D по дугам AKB, BLC и CMD равен пути по дуге AND.

78. а) Как изменится радиус окружности, если длину окружности: увеличить в k раз? уменьшить в k раз?

б) Как изменится радиус окружности, если длину окружности уменьшить на 1 см?

в) Длина окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равна l. Найдите длину окружности, описанной около этого треугольника.

г) Длина окружности равна длине дуги другой окружности, радиус которой в 8 раз больше радиуса первой окружности. Найдите градусную меру этой дуги.

д) Окружность касается каждой из двух окружностей с общим центром. Докажите, что длина одной из этих окружностей равна полуразности длин двух других.

79. а) Найдите площадь круга, вписанного: в равносторонний треугольник со стороной a; в прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему острым углом α.

б) Площадь круга, вписанного в квадрат, равна 7 см^2. Найдите площадь круга, описанного около этого квадрата.

в) Площадь кольца между двумя окружностями с общим центром равна 9π см^2. Найдите хорду большей окружности, касающуюся меньшей окружности.

г) Постройте окружность, ограничивающую круг с площадью, равной сумме площадей двух данных кругов.

80. а) Найдите площадь круга, вписанного: в равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α, противолежащим основанию; в равнобедренную трапецию с бо́льшим основанием a и острым углом α.

б) Площадь круга, описанного около равностороннего треугольника, больше площади вписанного в него круга на 12π см^2. Найдите радиус вписанного круга.

в) Отрезок AB — диаметр круга с площадью 36 см^2, точки P и Q лежат на одной полуокружности с концами A и B. Найдите площадь фигуры, ограниченной хордами AP и AQ и дугой окружности, если $\smile AP = \smile BQ = 45°$.

г) Дана окружность с центром O. Постройте окружность с центром O так, чтобы площадь ограниченного ей круга равнялась площади кольца между ней и данной окружностью.

Вопросы для повторения

1. Какие многоугольники называются равносоставленными?
2. Докажите, что треугольник равносоставлен с прямоугольником, одна из смежных сторон которого равна половине периметра треугольника, а другая — радиусу вписанной в него окружности.
3. Расскажите, как измеряются площади многоугольников. Что такое квадратный сантиметр?
4. Какие свойства площадей называются основными?
5. Какие многоугольники называются равновеликими? В чём заключается теорема Бойяи — Гервина?
6. Сформулируйте и докажите теорему о площади прямоугольника.
7. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.
8. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной в него окружности.
9. Как связаны площади двух подобных многоугольников?
10. Что такое основание треугольника? Что называют высотой треугольника в том случае, когда выбрано основание?
11. Сформулируйте и докажите теорему о площади треугольника.
12. Как выражается площадь треугольника через две его стороны и угол между ними?
13. Что такое основание параллелограмма? Что называют высотой параллелограмма в том случае, когда выбрано основание?
14. Сформулируйте и докажите теорему о площади параллелограмма.

15. Как выражается площадь параллелограмма через две его стороны и угол между ними?

16. Сформулируйте и докажите теорему о площади трапеции.

17. Выведите формулу Герона.

18. Выведите формулы, выражающие: а) периметр и площадь вписанного в окружность правильного n-угольника через её радиус; б) периметр и площадь описанного около окружности правильного n-угольника через её радиус.

19. Выведите формулу, связывающую: а) периметры правильных вписанного и описанного для данной окружности n-угольников; б) площадь вписанного в окружность правильного n-угольника с периметром описанного около неё правильного n-угольника.

20. Выведите формулу, выражающую длину окружности через её радиус.

21. Объясните, какое число обозначается буквой π. Чему равно его приближённое значение с точностью до 0,01?

22. Выведите формулу длины дуги окружности.

23. Выведите формулу, выражающую площадь круга через его радиус.

24. Какая фигура называется сектором? Выведите формулу площади сектора с дугой в α градусов и радиусом R.

25. Какая фигура называется сегментом? Как найти площадь сегмента?

Дополнительные задачи

§ 22

81. Докажите, что многоугольник, описанный около окружности, равносоставлен с прямоугольником, одна из смежных сторон которого равна половине периметра многоугольника, а другая — радиусу окружности.

82. Окружность касается стороны $AB = c$ и продолжений сторон $BC = a$ и $CA = b$ треугольника ABC. Докажите, что этот треугольник равновелик прямоугольнику, одна из смежных сторон которого равна $\frac{1}{2}(a + b - c)$, а другая — радиусу окружности.

83. Докажите, что из всех треугольников, у которых одна сторона равна a, а другая равна b, наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны взаимно перпендикулярны.

84. Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.

85. Через вершину квадрата проведите две прямые так, чтобы они разделили его на три равновеликих многоугольника.

86. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если $AB = 5$ см, $BC = 13$ см, $CD = 9$ см, $DA = 15$ см, $AC = 12$ см.

87. Докажите, что медианы треугольника разделяют его на шесть равновеликих треугольников.

88. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки L, M и N так, что $AL : LB = BM : MC = CN : NA = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника LMN, если площадь треугольника ABC равна S.

89. Стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника равны друг другу. Найдите отношения площадей этих многоугольников.

90. Найдите отношение площадей двух правильных шестиугольников — вписанного в окружность и описанного около неё.

91. Выразите сторону, периметр и площадь правильного треугольника: а) через радиус r вписанной окружности; б) через радиус R описанной окружности.

92. Перпендикуляр, проведённый из точки пересечения диагоналей параллелограмма с площадью 900 см^2 к большей стороне, делит её на отрезки, равные 33 см и 12 см. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

93. Диагонали равнобедренной трапеции со средней линией, равной a, взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

94. Через вершину B и середину диагонали AC равнобедренной трапеции $ABCD$ проведена прямая, пересекающая основание AD в точке M. Найдите площадь треугольника BDM, если $AM = 5$ см, $DM = 12$ см, $AB = 10$ см.

95. Диагональ равнобедренной трапеции равна 13 см, а её высота равна 12 см. Найдите площадь трапеции.

96. Диагональ BD трапеции $ABCD$ равна боковой стороне AB и перпендикулярна к ней, $AD = a$, $BC = b$. Найдите площадь трапеции.

97. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ делят перпендикулярный к ним отрезок PQ на три равные части. Найдите площадь трапеции, если площади треугольников ADQ и BCP равны S_1 и S_2.

98. Диагонали трапеции $ABCD$ с основанием AD пересекаются в точке O, площади треугольников AOD и BOC равны 12 см^2 и 3 см^2. Найдите площадь трапеции.

99. Окружность с диаметром AD описана около трапеции $ABCD$. Найдите углы трапеции, если её диагональ равна 6, а площадь равна 9.

100. Диагональ BD равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна к боковой стороне AB, $AD = a$, $\angle A = \alpha$. Найдите площадь трапеции.

101. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, площади треугольников BOC, COD и AOD равны соответственно 5 см², 10 см² и 15 см², $AB = 6$ см, $AO = 5$ см. Найдите $\angle BAO$.

102*. Докажите, что: а) из всех треугольников с данной стороной и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник; б) из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

§ 23

103. Найдите длину окружности, вписанной в ромб, если: а) диагонали ромба равны 6 см и 8 см; б) сторона ромба равна a, а острый угол равен α.

104. Из точки M к окружности проведены отрезки касательных MA и MB. Вторая окружность касается дуги AB и отрезков MA и MB. Найдите длину второй окружности, если дуга AB равна 120° и её длина равна l.

105. Найдите длину окружности, описанной около: а) прямоугольного треугольника с катетами a и b; б) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b.

106. Три окружности с длинами c касаются друг друга. Найдите длину окружности, касающейся каждой из них извне.

107. Четыре окружности с длинами c касаются друг друга так, что каждая из них касается ровно двух других. Найдите длину окружности, касающейся каждой из них извне.

108. Найдите площадь круга, описанного около: а) прямоугольника со сторонами a и b; б) прямоугольного треугольника с катетом a и противолежащим углом α; в) равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h, проведённой к основанию.

109. На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены три полукруга. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

110. В правильный многоугольник вписана окружность. Докажите, что отношение площади круга, ограниченного этой окружностью, к площади многоугольника равно отношению длины окружности к периметру многоугольника.

111. К окружностям радиусов r и $3r$, касающимся друг друга извне, проведена общая касательная так, что окружности лежат по одну сторону от неё. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезком этой касательной и двумя дугами окружностей, меньшими полуокружностей.

112. Отрезок CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая к гипотенузе, $AC = b$, $BC = a$, а длина окружности, вписанной в треугольник ACH, равна l. Докажите, что площадь круга, вписанного в треугольник BCH, равна $\dfrac{a^2 l^2}{4\pi b^2}$.

113. Радиус кругового сектора равен R, а его дуга равна 60°. Окружность касается радиусов OM и ON, ограничивающих сектор, в точках A и B, а его дуги в точке C. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками OA и OB и дугой ACB.

114. Постройте границу круга, площадь которого в 4 раза меньше площади данного круга.

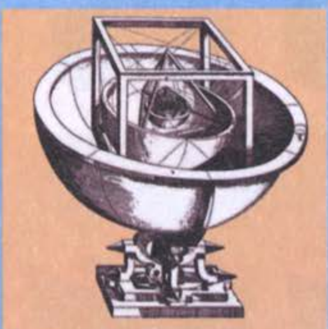
115. Постройте границу круга, равновеликого фигуре, ограниченной двумя данными окружностями, одна из которых лежит внутри другой.

116. Постройте границу круга, площадь которого равна сумме площадей трёх данных кругов.

Глава 9

Некоторые сведения из стереометрии

Эта небольшая глава является введением в стереометрию, т. е. ту часть геометрии, в которой изучаются геометрические фигуры в пространстве. Представление о таких фигурах дают окружающие нас предметы. Мы расскажем о некоторых видах многогранников (пирамида, призма, параллелепипед, правильные многогранники) и о простейших телах и поверхностях вращения (цилиндр, конус, сфера, шар). Будут приведены формулы для вычисления объёмов и площадей поверхностей некоторых тел, а также рассмотрены задачи на построение сечений параллелепипеда. Изучение стереометрии развивает наши пространственные представления, что важно для многих видов человеческой деятельности.



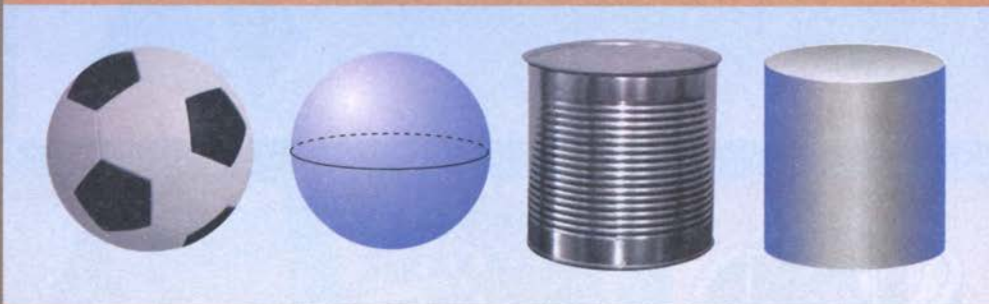



§ 24 Многогранники

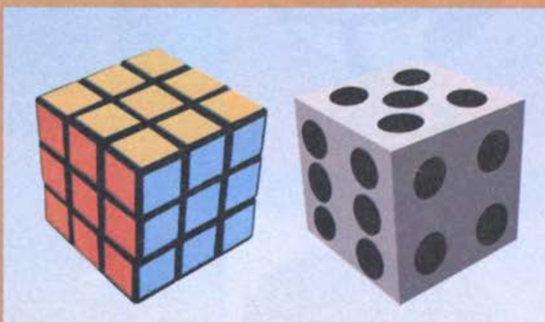
112 Предмет стереометрии

До сих пор мы занимались планиметрией — изучали свойства геометрических фигур на плоскости. Раздел школьного курса геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве, называется стереометрией.

В стереометрии наряду с плоскими фигурами рассматриваются геометрические тела и их поверхности. Можно сказать, что геометрическое тело — это часть пространства, отделённая от остальной части пространства поверхностью — границей этого тела. Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. Например, футбольный мяч имеет форму геометрического тела, называемого шаром, а консервная банка имеет форму геометрического тела, называемого цилиндром. Границей шара является сфера, а граница цилиндра состоит из двух кругов (оснований цилиндра) и боковой поверхности.



▲ Стереометрия — от греческих στερεός [стереос] — твёрдый, пространственный и μετρέω [метрео] — измеряю.



Куб — от греческого κύβος [кибос] — игральная кость. ▶

Кристаллы имеют форму геометрических тел, поверхности которых составлены из многоугольников (в стереометрии под многоугольником, как правило, понимается фигура, состоящая из сторон многоугольника и его внутренней области). Такие поверхности называются многогранниками. Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его гранями, стороны граней — рёбрами, а концы рёбер — вершинами многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю многогранника. На рисунке 93 изображён многогранник, составленный из шести равных квадратов. Он называется кубом. Куб имеет шесть граней, двенадцать рёбер, восемь вершин и четыре диагонали.

Плоскость, по обе стороны от которой есть точки тела, называется секущей плоскостью этого тела (рис. 94). Фигура, представляющая собой общую часть тела и секущей плоскости, называется сечением тела (см. рис. 94).

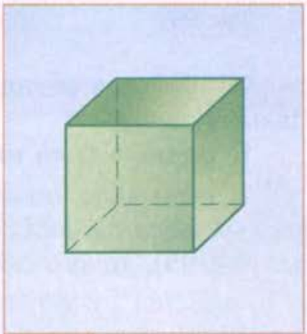


Рис. 93

Величина части пространства, занимаемой геометрическим телом, называется объёмом этого тела. Как мы помним, в качестве единицы измерения площадей обычно используют квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков. В качестве единицы измерения объёмов обычно берут куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Процесс измерения объёмов тел аналогичен процессу измерения площадей. Он позволяет выразить объём данного тела некоторым положительным числом, показывающим, сколько раз единица измерения и её части укладываются в этом теле.

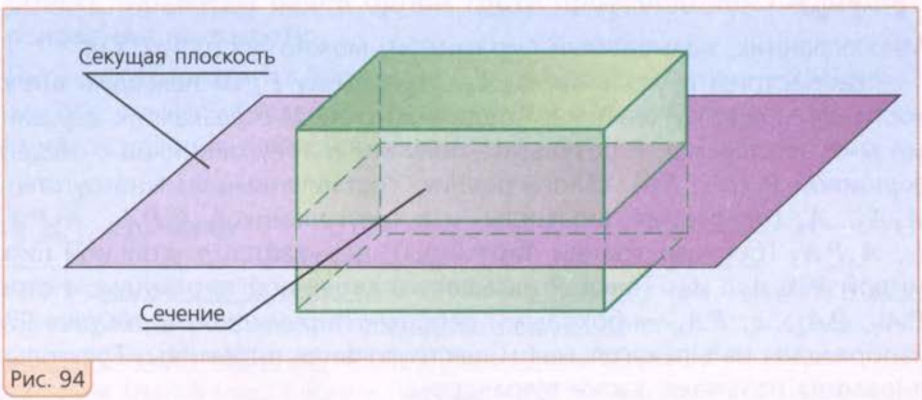
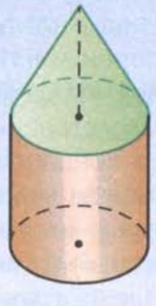


Рис. 94



Тело составлено из двух тел

Рис. 95

Пирамида $PA_1A_2\dots A_n$

Рис. 96

Объёмы тел обладают свойствами, аналогичными основным свойствам площадей:

1 равные тела имеют равные объёмы;

2 если тело составлено из нескольких тел (так, что внутренние области любых двух из этих тел не имеют общих точек, см. рис. 95), то его объём равен сумме объёмов этих тел.

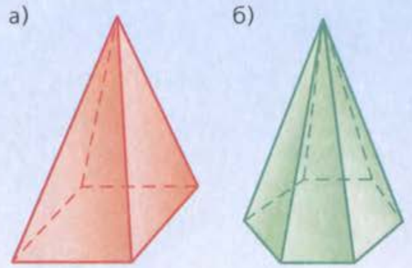
Свойства 1 и 2 называются основными свойствами объёмов.

В этой главе мы рассмотрим некоторые виды геометрических тел и приведём формулы, по которым вычисляются их объёмы и площади поверхностей. При этом мы будем опираться на наглядные представления. Доказательства соответствующих утверждений будут приведены в систематическом курсе стереометрии, изучаемом в 10—11 классах.

113 Пирамида

Многогранник, называемый пирамидой, можно построить так.

Рассмотрим n-угольник $A_1A_2...A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединим точку P отрезками с вершинами многоугольника. В результате получим n треугольников с общей вершиной P (рис. 96). Многогранник, составленный из многоугольника $A_1A_2...A_n$ (основания пирамиды) и n треугольников A_1PA_2, A_2PA_3, ..., A_nPA_1 (боковых граней пирамиды), называется n-угольной пирамидой $PA_1A_2...A_n$. Точка P называется вершиной пирамиды, а отрезки PA_1, PA_2, ..., PA_n — боковыми рёбрами пирамиды. На рисунке 97 изображены четырёхугольная и шестиугольная пирамиды. Треугольную пирамиду называют также тетраэдром.



Четырёхугольная пирамида

Шестиугольная пирамида

Рис. 97

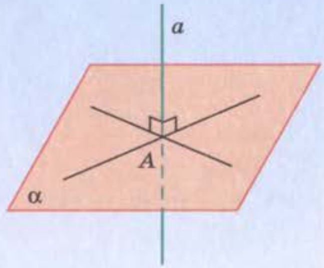


Рис. 98

Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с плоскостью её основания и перпендикулярный к этой плоскости (отрезок PH на рисунке 96), называется высотой пирамиды. Поясним, что понимается под перпендикулярностью прямой и плоскости. Прямая a, пересекающая плоскость α в некоторой точке A (рис. 98), называется перпендикулярной к этой плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α и проходящей через точку A.

Пирамида — от греческого πῦραμις [пирамис].

В курсе стереометрии доказывается, что:

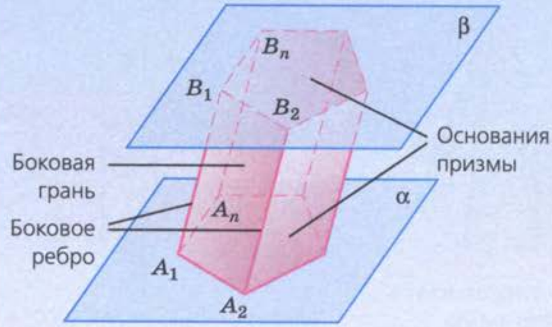
- **объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.**

Пирамида называется правильной, если её основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является её высотой.

114 Призма

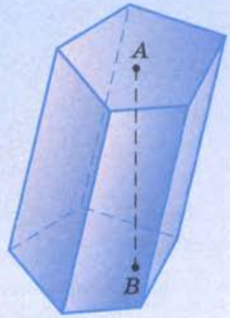
Чтобы описать многогранник, называемый призмой, нам потребуются понятия параллельности двух плоскостей и двух прямых в пространстве.

Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек (например, плоскости пола и потолка комнаты). Две пря-



Призма $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n$

Рис. 99



Отрезок AB — высота призмы

Рис. 100

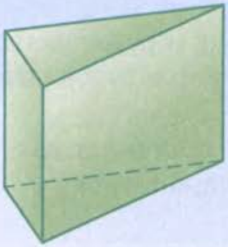
мые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Рассмотрим равные многоугольники $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$, расположенные в параллельных плоскостях α и β так, что их равные стороны A_1A_2 и B_1B_2, A_2A_3 и B_2B_3, ..., A_nA_1 и B_nB_1 являются параллельными сторонами четырёхугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ (рис. 99). В каждом из этих четырёхугольников две стороны равны и параллельны, поэтому все они являются параллелограммами.

Многогранник, составленный из двух равных n-угольников $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ и n параллелограммов $A_1A_2B_2B_1$, ..., $A_nA_1B_1B_n$, называется n-угольной призмой $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n$. Указанные n-угольники называются основаниями, параллелограммы — боковыми гранями, а отрезки

◀ Призма — от греческого πρισμα [присма] — отпиленный кусок, отпиленная часть.

Параллелепипед — от греческих παράλληλος [параллелос] — параллельный и επιπεδον [эпипедон] — плоскость. ▶



Прямая призма

Рис. 101

Параллелепипед

Рис. 102

Прямоугольный параллелепипед

Рис. 103

A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n — боковыми рёбрами призмы. Все боковые рёбра призмы равны и параллельны друг другу.

Отрезок, соединяющий произвольную точку плоскости одного основания с точкой плоскости другого основания и перпендикулярный к обеим плоскостям (рис. 100), называется высотой призмы.

В курсе стереометрии доказывается, что все высоты призмы равны и параллельны друг другу. Там же доказывается, что:

- **объём призмы равен произведению площади основания на высоту.**

Если все боковые рёбра призмы перпендикулярны к плоскостям её оснований, то призма называется прямой (рис. 101); в противном случае призма называется наклонной (рис. 100, 102). Боковые грани прямой призмы — прямоугольники. Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется правильной.

Призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется параллелепипедом (см. рис. 102). Таким образом, все грани параллелепипеда — параллелограммы. Если параллелепипед является прямой призмой, т. е. его боковые рёбра перпендикулярны к плоскостям оснований, то боковые грани — прямоугольники. Такой параллелепипед называется прямым. Прямой параллелепипед, основания которого прямоугольники, называется прямоугольным (рис. 103). Форму прямоугольного параллелепипеда имеют коробки, комнаты и многие другие предметы. Отметим, что:

- **объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его рёбер с общей вершиной.**

115 Построение сечений параллелепипеда

При построении сечений параллелепипеда мы будем руководствоваться следующим правилом (оно будет обосновано в курсе стереометрии):

- **отрезки, по которым секущая плоскость пересекает две противоположные грани параллелепипеда, параллельны.**

Рассмотрим два примера.

Задача

На рёбрах параллелепипеда отмечены точки A, B и C так, как показано на рисунке 104, *а*. Требуется построить сечение параллелепипеда плоскостью ABC (т. е. плоскостью, проходящей через точки A, B и C).

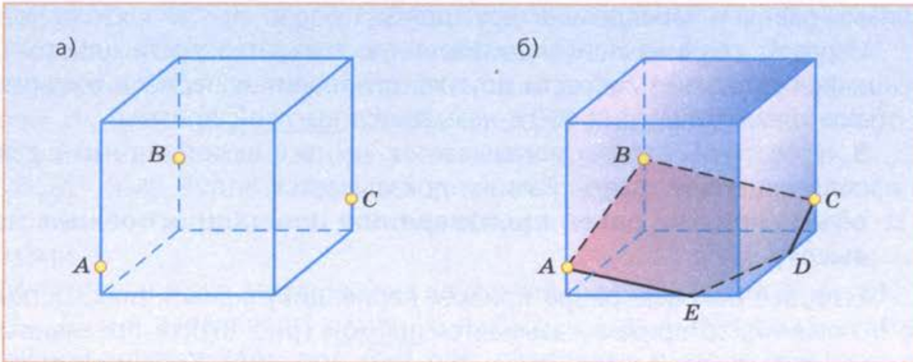


Рис. 104

Решение

Проведём сначала отрезки AB и BC, а затем, следуя указанному правилу, через точку A проведём прямую, параллельную прямой BC, а через точку C — прямую, параллельную прямой AB. Точки пересечения этих прямых с рёбрами нижней грани обозначим буквами E и D (рис. 104, *б*). Наконец, проведём отрезок ED. Искомое сечение — пятиугольник $ABCDE$ — построено. ▲

Задача

На рёбрах параллелепипеда отмечены точки A, B и C так, как показано на рисунке 105, *а*. Требуется построить сечение параллелепипеда плоскостью ABC.

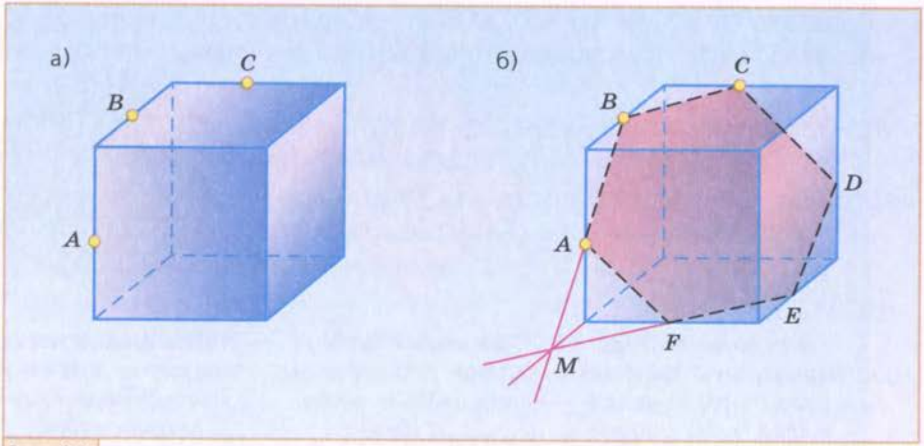


Рис. 105

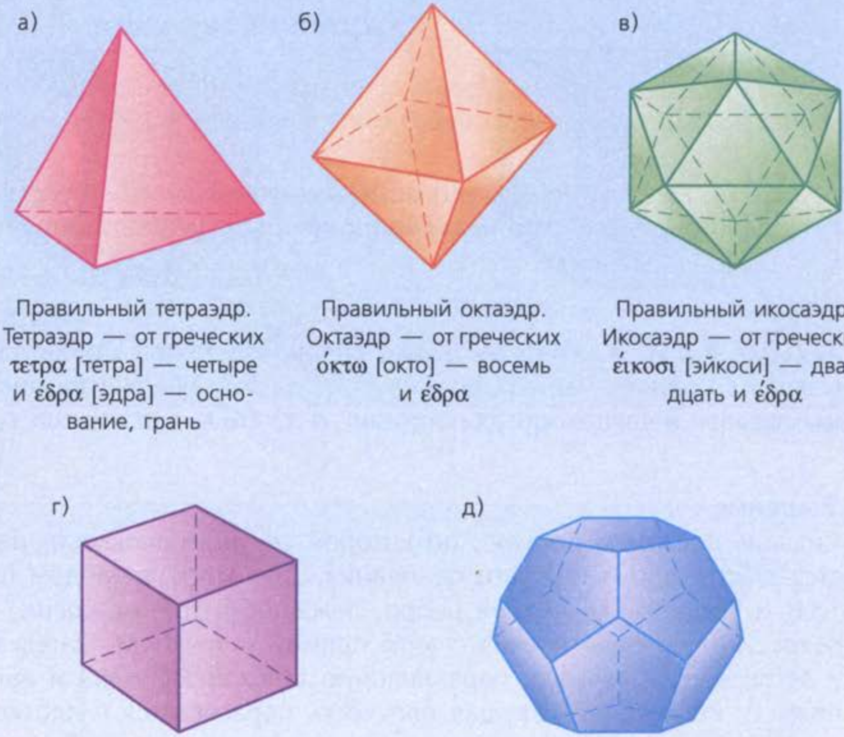
▼ Решение

Сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Для этого проведём прямую AB и продолжим нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и отрезок AB, до пересечения с этой прямой в точке M. Затем через точку M проведём прямую, параллельную прямой BC. Она и является той прямой, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Проведённая прямая пересекается с рёбрами нижнего основания в точках E и F (см. рис. 105, *б*). Через точку E проведём прямую, параллельную прямой AB, и обозначим буквой D точку её пересечения с боковым ребром. Осталось провести отрезки AF и CD, и искомое сечение — шестиугольник $ABCDEF$ — построено. ▲

116 Правильные многогранники

Выпуклый многогранник (т. е. многогранник, лежащий по одну сторону от плоскости каждой своей грани) называется правильным, если все его грани — равные правильные многоугольники и, кроме того, к каждой его вершине сходится одно и то же число рёбер. Примером правильного многогранника является куб: все его грани — равные квадраты, и к каждой вершине сходятся три ребра.

На первый взгляд может показаться (по аналогии с правильными многоугольниками), что существует бесконечно много видов правиль-



Правильный тетраэдр. Тетраэдр — от греческих τετρα [тетра] — четыре и έδρα [эдра] — основание, грань

Правильный октаэдр. Октаэдр — от греческих όκτω [окто] — восемь и έδρα

Правильный икосаэдр. Икосаэдр — от греческих έικοσι [эйкоси] — двадцать и έδρα

Куб

Правильный додекаэдр. Додекаэдр — от греческих δοδεκα [додека] — двенадцать и έδρα

Рис. 106

ных многогранников. Оказывается, однако, что это не так. В курсе стереометрии доказывается, что существует ровно пять видов правильных многогранников:

1 правильный тетраэдр (рис. 106, *а*); он составлен из четырёх равносторонних треугольников; каждая его вершина является вершиной трёх треугольников;

2 правильный октаэдр (рис. 106, *б*); он составлен из восьми равносторонних треугольников; каждая его вершина является вершиной четырёх треугольников;

3) правильный икосаэдр (рис. 106, *в*); он составлен из двадцати равносторонних треугольников; каждая его вершина является вершиной пяти треугольников;

4) куб (рис. 106, *г*); он составлен из шести квадратов; каждая его вершина является вершиной трёх квадратов;

5) правильный додекаэдр (рис. 106, *д*); он составлен из двенадцати правильных пятиугольников; каждая его вершина является вершиной трёх правильных пятиугольников.

Правильные многогранники называют также платоновыми телами по имени древнегреческого философа Платона (429—348 гг. до н. э.). Последователи Пифагора придавали правильным многогранникам особый, мистический смысл: тетраэдр, куб, октаэдр и икосаэдр ассоциировались у них с огнём, землёй, воздухом и водой, а додекаэдр — со всей Вселенной.

Вопросы и задачи

117. а) Тело T, объём которого равен V, составлено из трёх тел: T_1, T_2 и T_3. Сумма объёмов тел T_1 и T_2 равна V_1, а сумма объёмов тел T_2 и T_3 равна V_2. Найдите объём тела T_2.

б) Докажите, что боковые грани правильной пирамиды являются равными друг другу равнобедренными треугольниками.

в) Найдите площадь грани ABC тетраэдра $ABCD$, если $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 90°$ и $DA = DB = DC = 6$ см.

г) Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$, если её высота равна h и $\angle PAB = \alpha$.

д) Изобразите тетраэдр $ABCD$ и на рёбрах AB, BC и AC отметьте соответственно точки K, L и M так, чтобы $AK = KB$, $BL = LC$, $AM \neq MC$. Постройте точку пересечения: прямой KM и плоскости BCD; прямой ML и плоскости ABD.

е) Изобразите тетраэдр $ABCD$ и отметьте на его рёбрах AB и AC точки M и N так, чтобы $AM : MB \neq AN : NC$. Постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M и N и точку пересечения медиан треугольника BCD.

118. а) Тело T составлено из трёх тел: P, Q и R. Суммы объёмов тел P и Q, Q и R, R и P соответственно равны V_1, V_2, V_3. Найдите объём тела T.

б) Докажите, что площадь боковой поверхности правильной пирамиды (т. е. сумма площадей её боковых граней) равна половине произведения периметра основания на высоту боковой грани, проведённую из вершины пирамиды.

в) Найдите площадь грани ABC тетраэдра $ABCD$, если $\angle ADB = \angle BDC = 60°$, $AC = BD = 4$ см и $AD = CD = 3$ см.

г) Высота правильной треугольной пирамиды $PABC$ с вершиной P равна h, $\angle PAB = \alpha$. Найдите объём пирамиды.

д) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 5. Найдите площадь боковой поверхности и объём этой пирамиды.

е) Изобразите тетраэдр $ABCD$ и на его рёбрах AB, AC и CD отметьте соответственно точки K, L и M так, чтобы $AK : KB \neq AL : LC$. Постройте сечение этого тетраэдра плоскостью KLM.

119. а) Докажите, что площадь боковой поверхности прямой призмы (т. е. сумма площадей её боковых граней) равна произведению периметра основания на боковое ребро.

б) Рёбра прямоугольного параллелепипеда, имеющие общую вершину, относятся как 2 : 3 : 6, а его диагональ равна 7. Найдите объём этого параллелепипеда.

в) Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм со сторонами 3 см и 5 см и острым углом в 60°. Площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через бóльшую диагональ основания и боковое ребро, равна 63 см^2. Найдите площадь поверхности и объём параллелепипеда.

г) Все рёбра наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a и $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60°$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью A_1BC.

д) Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью ACA_1. Какая фигура получится в сечении?

е) Точка E — середина ребра A_1B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью ACE и найдите периметр сечения, если $AB = BC = 8$ см и $AA_1 = 3$ см.

120. а) Докажите, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его рёбер с общей вершиной.

б) Стороны основания и диагональ прямоугольного параллелепипеда относятся как 1 : 2 : 3, а боковое ребро равно 4 см. Найдите объём параллелепипеда и его диагональ.

в) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ диагонали B_1F и B_1E равны 15 и 17. Найдите площадь боковой поверхности и объём этой призмы.

г) Все рёбра наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a и $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60°$. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью AB_1C_1.

д) Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте на рёбрах AA_1 и CC_1 точки K и L так, чтобы $AK = KA_1$ и $CL \neq LC_1$. Постройте точку пересечения: прямой KL с плоскостью ABC; прямой AL с плоскостью $A_1B_1C_1$.

е) Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отметьте на рёбрах B_1C_1, CC_1, AB соответственно точки K, M, N и постройте сечение параллелепипеда плоскостью KMN.

§ 25
Тела и поверхности вращения

117 Цилиндр

Рассмотрим прямоугольник OO_1M_1M и представим себе, что он вращается вокруг своей стороны OO_1. В результате получается тело, которое называется цилиндром (рис. 107).

Прямая OO_1 называется осью цилиндра, а отрезок OO_1 — его высотой. При вращении сторон OM и O_1M_1 образуются два круга одинакового радиуса. Эти круги называются основаниями цилиндра, а их радиус — радиусом цилиндра. При вращении прямой MM_1 образуется поверхность, состоящая из прямых, параллельных оси цилиндра. Она называется цилиндрической поверхностью. Часть цилиндрической поверхности, заключённая между плоскостями оснований цилиндра (плоскости α и β на рисунке 108), называется боковой поверхностью цилиндра. Отрезки, из которых она состоит, называются образующими цилиндра.

Таким образом, цилиндр — это тело, ограниченное двумя равными кругами и частью цилиндрической поверхности. В курсе стереометрии доказывается, что:

- **объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.**

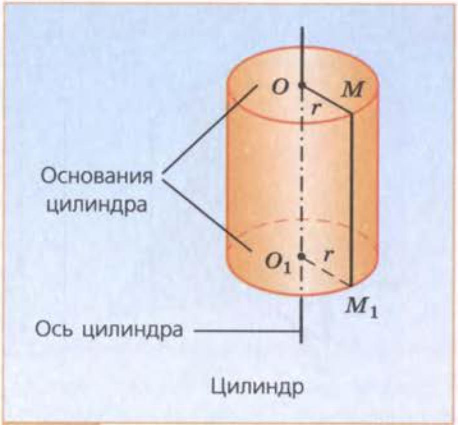


Рис. 107

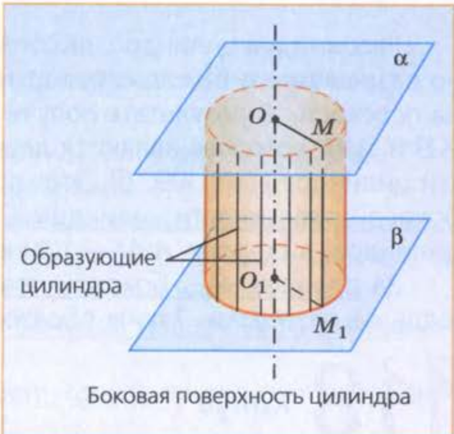
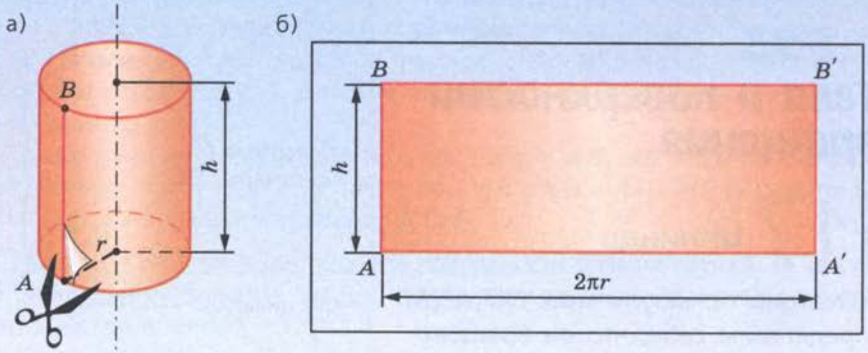


Рис. 108

Цилиндр — от греческого κύλινδρος [килиндрос] — валик.



Развёртка боковой поверхности цилиндра

Рис. 109

Рассмотрим цилиндр с высотой h и радиусом r (рис. 109, *а*). Мысленно разрежем его боковую поверхность по образующей AB и развернём на плоскость. В результате получится прямоугольник $ABB'A'$, стороны AB и $A'B'$ которого являются двумя краями разреза боковой поверхности цилиндра (рис. 109, *б*). Этот прямоугольник называется развёрткой боковой поверхности цилиндра. Сторона AB развёртки равна высоте h цилиндра, а сторона AA' — длине окружности основания: $AA' = 2\pi r$.

За площадь $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра принимают площадь её развёртки. Таким образом, $S_{бок} = 2\pi rh$.

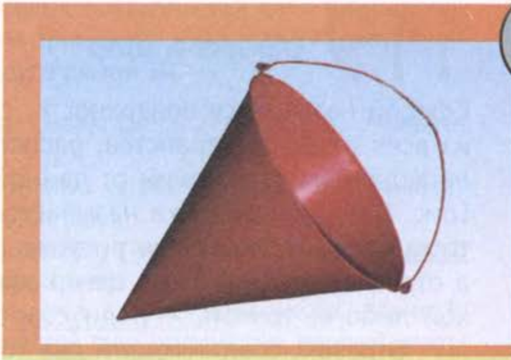
118 Конус

Рассмотрим прямоугольный треугольник AOP и представим себе, что он вращается вокруг катета OP. В результате получается тело, которое называется конусом (рис. 110).

Прямая OP называется осью конуса, а отрезок OP — его высотой. При вращении катета OA образуется круг. Этот круг называется основанием конуса. При вращении прямой AP образуется поверхность, состоящая из прямых, пересекающихся в точке P. Эта поверхность называется конической поверхностью. Часть конической поверхности, заключённая между точкой P и плоскостью основания, называется боковой поверхностью конуса. Отрезки, из которых она состоит, называются образующими конуса, а точка P — вершиной конуса.

Таким образом, конус — это тело, ограниченное кругом и частью конической поверхности.

Рис. 110



Конус — от греческого κωνος [конос] — кегля, сосновая шишка, верхушка шлема.

В курсе стереометрии доказывается, что:

- **объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.**

Рассмотрим конус, радиус основания которого равен r, а образующая равна l (рис. 111, *а*). Мысленно разрежем его боковую поверхность по образующей PA и развернём её на плоскость. В результате получится круговой сектор (рис. 111, *б*), радиус которого равен l, а длина дуги равна длине окружности основания конуса, т. е. равна $2\pi r$. Этот сектор называется развёрткой боковой поверхности конуса. Его площадь равна πrl (докажите это).

За площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса принимают площадь её развёртки. Таким образом, $S_{бок} = \pi rl$.

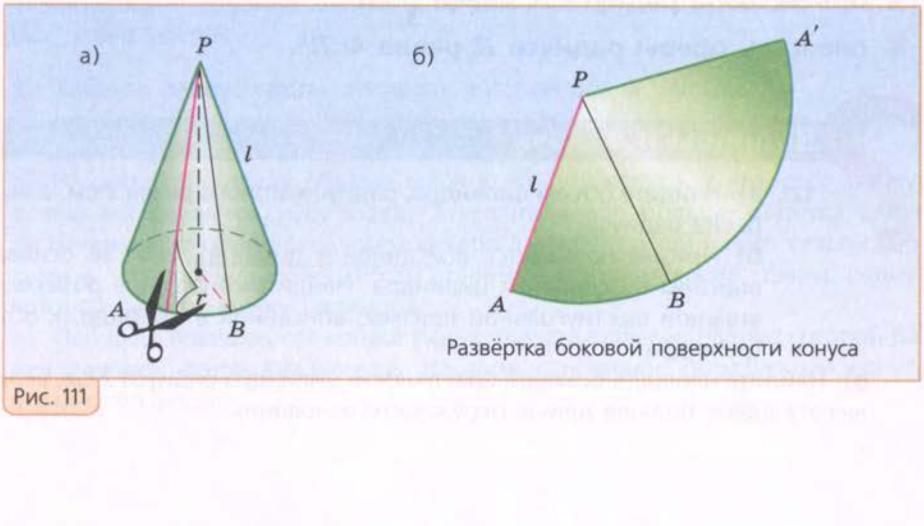


Рис. 111

119 Сфера и шар

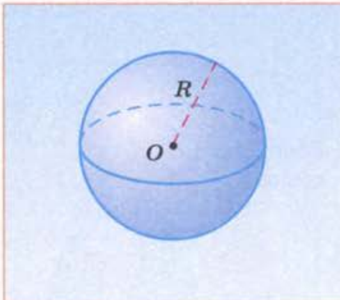


Рис. 112

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на заданном расстоянии от данной точки (рис. 112). Данная точка называется центром сферы (точка O на рисунке 112), а отрезок, соединяющий центр сферы с какой-либо её точкой, — радиусом сферы.

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется диаметром сферы. Поскольку центр сферы является серединой диаметра, то диаметр сферы радиуса R равен $2R$.

Сфера — от греческого σφαῖρα [сфайра] — шар, мяч.

Тело, ограниченное сферой, называется шаром. Центр, радиус и диаметр сферы называются также центром, радиусом и диаметром шара, ограниченного этой сферой. Таким образом, шар радиуса R с центром O содержит все точки пространства, расположенные от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая и саму точку O), и не содержит других точек. Обратим внимание на то, что шар может быть получен вращением полукруга вокруг его диаметра, а сфера — вращением полуокружности вокруг диаметра.

В курсе стереометрии доказывается, что:

- **объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$;**
- **площадь сферы радиуса R равна $4\pi R^2$.**

Вопросы и задачи

121. а) Найдите объём цилиндра, радиус которого равен 2 см, а высота равна радиусу.

б) Призма называется вписанной в цилиндр, если её основания вписаны в основания цилиндра. Найдите отношение объёма правильной шестиугольной призмы, вписанной в цилиндр, к объёму цилиндра.

в) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра радиуса 2 см, если его высота вдвое больше длины окружности основания.

г) Найдите отношение площадей боковых поверхностей двух цилиндров, первый из которых получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB, а второй — вращением вокруг прямой BC.

122. а) Найдите радиус цилиндра, если его объём равен 27π см^3, а высота равна 3 см.

б) Найдите отношение объёма цилиндра к объёму правильной восьмиугольной призмы, вписанной в этот цилиндр.

в) Отношение высоты цилиндра к его радиусу равно k. Найдите отношение площади поверхности цилиндра к площади его основания.

г) Отношение стороны AB прямоугольника $ABCD$ к стороне BC равно k. Найдите отношение площадей поверхностей двух цилиндров, первый из которых получен вращением этого прямоугольника вокруг прямой AB, а второй — вращением вокруг прямой BC.

123. а) Найдите объём конуса, радиус основания которого равен 3 см, а высота вдвое больше радиуса основания.

б) Площадь боковой поверхности конуса равна 20π см^2, а площадь основания — 16π см^2. Найдите объём этого конуса.

в) Отношение катетов прямоугольного треугольника равно 2. Найдите отношение площадей боковых поверхностей двух конусов, первый из которых получен вращением этого треугольника вокруг большего катета, а второй — вращением вокруг меньшего катета.

124. а) Найдите высоту конуса, объём которого равен $4{,}5\pi$ см^3, а радиус основания вдвое больше высоты.

б) Площадь основания конуса равна π м^2, а развёртка его боковой поверхности представляет собой полукруг. Найдите площадь боковой поверхности и объём этого конуса.

в) Один конус получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов, а другой — вращением вокруг другого катета. Докажите, что отношение объёмов этих конусов равно отношению площадей их боковых поверхностей.

125. а) Найдите радиус сферы, площадь которой равна 64π см^2.

б) Найдите отношение площадей двух сфер, если отношение объёмов ограниченных ими шаров равно 27.

в) Найдите отношение объёма шара к объёму конуса, у которого радиус основания равен радиусу шара, а высота вдвое больше радиуса шара.

г) Цилиндр получен вращением квадрата вокруг одной из его сторон. Докажите, что площадь поверхности цилиндра равна площади сферы, радиус которой равен радиусу цилиндра.

д) Площадь поверхности конуса равна площади сферы, радиус которой равен радиусу основания конуса. Найдите отношение образующей конуса к радиусу сферы.

126. а) Объёмы двух шаров относятся как $m^3 : n^3$. Найдите отношение площадей их поверхностей.

б) Шар разрезали на два полушара. Площадь поверхности одного полушара равна 12π дм^2. Найдите объём полушара.

в) Один катет прямоугольного треугольника вдвое больше другого. Конус получен вращением этого треугольника вокруг меньшего катета. Найдите отношение радиуса шара, объём которого равен объёму указанного конуса, к радиусу основания этого конуса.

г) Цилиндр и конус имеют общее основание и высоты, равные радиусу их основания. Докажите, что сумма объёмов цилиндра и конуса равна объёму шара, радиус которого равен радиусу основания конуса.

д) Конус получен вращением прямоугольного треугольника с углом в 30° вокруг большего катета. Докажите, что площадь поверхности конуса равна площади сферы, диаметр которой равен высоте конуса.

Вопросы для повторения

1. Какая поверхность называется многогранником? Что такое грани, рёбра, вершины и диагонали многогранника? Приведите примеры многогранников.
2. Какая плоскость называется секущей плоскостью данного тела? Что такое сечение тела?
3. Какие свойства объёмов тел называются основными?
4. Объясните, какой многогранник называется n-угольной пирамидой. Что такое основание, боковые грани, вершина, боковые рёбра и высота пирамиды? Какая пирамида называется правильной?
5. Какой формулой выражается объём пирамиды?
6. Объясните, какой многогранник называется n-угольной призмой. Что такое основания, боковые грани, боковые рёбра и высота призмы?
7. Какой формулой выражается объём призмы?
8. Какая призма называется прямой? правильной?
9. Объясните, что такое параллелепипед; какие многоугольники являются гранями: а) параллелепипеда; б) прямого параллелепипеда; в) прямоугольного параллелепипеда? Какой формулой выражается объём прямоугольного параллелепипеда?
10. Какой многогранник называется правильным? Сколько видов правильных многогранников существует? Назовите их. Что представляют собой грани этих многогранников? Сколько граней имеет каждый из них?

11. Объясните, какое тело называется цилиндром. Что такое ось, высота, основания, радиус, боковая поверхность, образующие цилиндра?

12. Какой формулой выражается объём цилиндра?

13. Объясните, как получается и что представляет собой развёртка боковой поверхности цилиндра.

14. Какой формулой выражается площадь боковой поверхности цилиндра?

15. Объясните, какое тело называется конусом. Что такое ось, высота, основание, боковая поверхность, образующие и вершина конуса?

16. Какой формулой выражается объём конуса?

17. Объясните, как получается и что представляет собой развёртка боковой поверхности конуса.

18. Какой формулой выражается площадь боковой поверхности конуса?

19. Что называется сферой и что такое её центр, радиус и диаметр?

20. Какое тело называется шаром? Что такое центр, радиус и диаметр шара?

21. Какой формулой выражается объём шара?

22. Какой формулой выражается площадь сферы?

Дополнительные задачи

§ 24

127. Докажите, что сумма квадратов рёбер тетраэдра в 4 раза больше суммы квадратов отрезков, соединяющих середины его противоположных рёбер.

128. Докажите, что прямые, проходящие через вершины тетраэдра и точки пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке.

129. Найдите площадь сечения правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B и D и середину ребра C_1D_1, если $AC = 12$ и $AA_1 = 4$.

130. Основаниями прямой призмы служат трапеции с основаниями a и b. Середины сторон этих трапеций являются вершинами куба. Найдите объём этой призмы.

131. Площадь боковой грани правильной шестиугольной призмы равна S. Через боковое ребро проведена плоскость, разделяющая призму на две части, объёмы которых относятся как 1 : 3. Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью.

132. На рёбрах $DA = 4$, $DB = 6$ и $DC = 5$ тетраэдра $ABCD$ отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что $DA_1 = 1$, $DB_1 = 3$ и $DC_1 = 2$. В каком отношении плоскость $A_1B_1C_1$ делит объём тетраэдра?

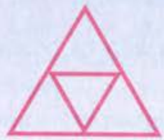


Рис. 113

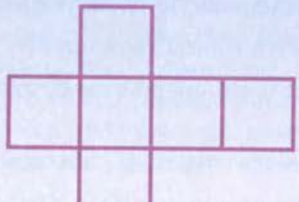


Рис. 114

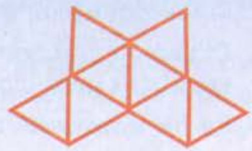


Рис. 115

133. Докажите, что диагональ параллелепипеда меньше суммы трёх рёбер, имеющих общую вершину.

134. Докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

135. Докажите, что сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его рёбер.

136. Изобразите тетраэдр $ABCD$ и отметьте точки P, Q и R соответственно на ребре AB, внутри грани ABC и внутри грани BCD. Постройте сечение тетраэдра плоскостью PQR.

137. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечения плоскостями AB_1D и A_1BC, а также общий отрезок этих сечений.

138. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отметьте точки K, L, M соответственно на ребре A_1B_1, на ребре AA_1, внутри грани $A_1B_1C_1D_1$ и постройте сечения параллелепипеда плоскостью KLM.

139. На рисунке 113 изображена развёртка правильного тетраэдра. Перерисуйте её в большем масштабе на плотный лист бумаги, вырежьте и склейте тетраэдр.

140. На рисунке 114 изображена развёртка куба. Перерисуйте её на плотный лист бумаги, вырежьте и склейте куб.

141. На рисунке 115 изображена развёртка правильного октаэдра. Перерисуйте её на плотный лист бумаги, вырежьте и склейте октаэдр.

142. На рисунке 116 изображена развёртка правильного додекаэдра. Перерисуйте её на плотный лист бумаги, вырежьте и склейте додекаэдр.

143. На рисунке 117 изображена развёртка правильного икосаэдра. Перерисуйте её на плотный лист бумаги, вырежьте и склейте икосаэдр.

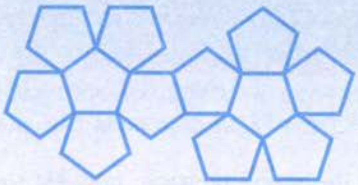


Рис. 116

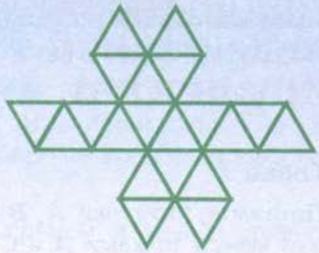


Рис. 117

§ 25

144. В правильную треугольную призму вписан цилиндр (т. е. основания цилиндра вписаны в основания призмы). Найдите площадь поверхности цилиндра, если сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 3.

145. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если дуга её развёртки равна 240°, а высота конуса равна $5\sqrt{5}$.

146. Трапеция $ABCD$ с основанием AD, в которой $\angle A = 90°$, $AB = BC = a$ и $AD = 2a$, вращается вокруг прямой AD. Найдите площадь поверхности тела, образованного при этом вращении.

147. Ромб с диагоналями, равными 6 и 8, вращается вокруг прямой, содержащей сторону ромба. Найдите площадь поверхности тела, образованного при этом вращении.

148. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан конус (т. е. их вершины совпадают, а основание конуса вписано в основание пирамиды). Найдите отношение объёмов конуса и пирамиды.

149. Найдите объём конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду со стороной основания, равной 6, и высотой, равной 4.

150. Объём шара равен 36π. Найдите площадь поверхности полушара.

Задачи повышенной трудности

Глава 7

151. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой, причём точка B лежит между точками A и C тогда и только тогда, когда для любой точки M имеет место равенство $MA^2 \cdot BC + MC^2 \cdot AB - MB^2 \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$.

152. Четырёхугольники $ABCD$, $AEFG$, $ADFH$, $FIJE$ и $BIJC$ — параллелограммы. Докажите, что четырёхугольник $AFHG$ также является параллелограммом.

153. Докажите, что четыре точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон данного четырёхугольника, являются вершинами параллелограмма.

154. Середины отрезков AB и CD, BC и DE соединены отрезками; точки F и G — середины полученных отрезков. Докажите, что отрезки FG и AE либо параллельны, либо лежат на одной прямой, и $FG = \frac{1}{4} AE$.

155. Координаты вершин треугольника — рациональные числа. Докажите, что координаты центра описанной около него окружности также являются рациональными числами.

156. Даны точки A и B и положительное число $k \neq 1$. Докажите, что: а) множество всех точек M, удовлетворяющих равенству $AM = k \cdot BM$, есть окружность (окружность Аполлония); б) эта окружность пересекается с любой окружностью, проходящей через точки A и B, так, что их радиусы, проведённые в точку пересечения, взаимно перпендикулярны.

157. Даны точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых величина $AM^2 - BM^2$ равна заданной величине.

158. Даны точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых величина $AM^2 + BM^2$ равна заданной величине.

159. Даны точки A и B и прямая a, не перпендикулярная к прямой AB. С помощью циркуля и линейки постройте на прямой a такие точки M_1 и M_2, в которых отношение $AM : BM$ $(M \in a)$ принимает наименьшее и наибольшее значения.

160. Докажите, что если сумма расстояний между серединами противоположных сторон четырёхугольника равна его полупериметру, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

161. В произвольном четырёхугольнике $ABCD$ точки M и N — середины диагоналей AC и BD, а точки P и Q — середины сторон AB и CD. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам AM, BN и PQ.

162. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, M — произвольная точка. Докажите, что величина $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ не зависит от выбора точки M.

163. Найдите расстояние от точки $M\,(x_0;\, y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$.

164. Точка M симметрична точке N стороны BC параллелограмма $ABCD$ относительно точки пересечения диагоналей этого параллелограмма. Докажите, что треугольники AND и CMB равны, а их стороны соответственно параллельны.

165. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена произвольная точка M. Докажите, что из отрезков, равных MA, MB, MC и MD, можно составить четырёхугольник, вписанный в параллелограмм $ABCD$ так, что на каждой стороне параллелограмма будет лежать ровно одна вершина этого четырёхугольника.

166. Через общую точку двух данных пересекающихся окружностей проведите (с помощью циркуля и линейки) прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

167. Даны две концентрические окружности. Постройте прямую, на которой эти окружности высекают три равные хорды.

168. Даны три прямые, пересекающиеся в одной точке, и на одной из этих прямых отмечена точка. Постройте треугольник, одной из вершин которого является отмеченная точка, а биссектрисы лежат на данных прямых.

169. Через середины сторон вписанного четырёхугольника проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам. Докажите, что эти прямые имеют общую точку.

170. На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки L, M и N. Докажите, что периметр треугольника LMN будет наименьшим в том случае, когда точки L, M и N — основания высот треугольника ABC, и выразите этот периметр через углы треугольника ABC и радиус R описанной около него окружности.

171. На сторонах треугольника ABC извне построены квадраты ABB_1A_1, ACC_1A_2. Докажите, что: а) отрезки A_1C и A_2B равны и взаимно перпендикулярны; б) центры квадратов и середины отрезков BC и A_1A_2 являются вершинами квадрата.

172. Точка O — центр правильного многоугольника $A_1A_2...A_n$. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

173. На сторонах остроугольного треугольника ABC извне построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Докажите, что: а) отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны, а угол между любыми двумя из них равен 60°; б) три окружности, описанные около равносторонних треугольников, пересекаются в некоторой точке O; в) прямые AA_1, BB_1 и CC_1 также пересекаются в точке O; г) каждая сторона треугольника ABC видна из точки O под углом 120°; д) точка O является той точкой плоскости, для которой сумма расстояний до вершин треугольника ABC принимает наименьшее значение.

174. Даны угол и точка M внутри его. На сторонах угла постройте точки, симметричные друг другу относительно точки M.

175. Даны точки M и N и прямая a, не параллельная прямой MN. Постройте треугольник ABC, в котором эти точки — середины сторон AB и AC, а прямая a содержит либо биссектрису угла B, либо биссектрису внешнего угла при вершине B.

176. Используя центральное подобие, докажите теорему о пересечении высот треугольника.

177. Используя центральное подобие, докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения её диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

178. На сторонах треугольника извне построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника, центр которого находится в точке пересечения медиан исходного треугольника (теорема Наполеона).

179. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC извне построены квадраты с центрами O_A, O_B и O_C. Докажите, что: а) отрезки AO_A и O_BO_C равны и перпендикулярны; б) прямые AO_A, BO_B и CO_C пересекаются в одной точке.

180. Окружность касается боковых сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC в точках M и N, а также окружности, описанной около этого треугольника. Докажите, что середина отрезка MN является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

181. Даны угол ABC и точка M внутри его. На стороне BC постройте точку, равноудалённую от прямой AB и точки M.

Глава 8

182. Каждая сторона одного треугольника больше любой стороны другого треугольника. Следует ли из этого, что площадь первого треугольника больше площади второго треугольника?

183. а) Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка M. Докажите, что сумма расстояний от точки M до прямых AB, BC и CA равна высоте треугольника. б) Внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$ отмечена точка M. Докажите, что сумма площадей треугольников ABM, CDM и EFM равна сумме площадей треугольников BCM, DEM и FAM.

184. Точки P и Q — середины сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Отрезок PQ разделяет четырёхугольник $ABCD$ на два равновеликих четырёхугольника. Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

185. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника, и найдите его площадь, если площадь данного треугольника равна S.

186. На каждой из сторон параллелограмма отмечена точка так, что площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках оказалась равной половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей этого четырёхугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

187. Через середину M стороны BC треугольника ABC проведена прямая, пересекающая стороны угла BAC в точках P и Q. Докажите, что площадь треугольника APQ не меньше площади треугольника ABC.

188. Дан неразвёрнутый угол AOB. Что представляет собой множество всех точек M, для каждой из которых треугольники OAM и OBM равновелики?

189. Прямая, проходящая через середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$, пересекает стороны AB и CD в точках E и F. Докажите, что треугольники ABF и CDE равновелики.

190. Внутри треугольника ABC с прямым углом C отмечена точка M так, что треугольники ABM, BCM и CAM равновелики. Найдите отношение $(AM^2 + BM^2) : CM^2$.

191. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает прямую AB в точке E, отрезок CD — биссектриса этого треугольника. Докажите, что площадь треугольника ABC равна среднему арифметическому площадей треугольников ACD и CDE тогда и только тогда, когда $AC = 2BC$.

192. Точка D делит сторону BC треугольника ABC в отношении $1 : 4$, считая от точки B, отрезок AD пересекает медиану BM в точке E. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника BDE?

193. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E, F, G и H так, что $FH \parallel AB$, $EG \parallel BC$. Докажите, что точка O пересечения отрезков EG и FH лежит на прямой AC тогда и только тогда, когда четырёхугольники $BFOE$ и $DHOG$ равновелики.

194. Точки E, F, G и H — середины сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Докажите, что при пересечении прямых AF, BG, CH и DE образуется параллелограмм, и найдите отношение его площади к площади параллелограмма $ABCD$.

195. Докажите, что площадь трапеции $ABCD$ равна произведению длины боковой стороны AB и перпендикуляра, проведённого из середины стороны CD к прямой AB.

196. Через точку, лежащую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разделяют треугольник на три треугольника, площади которых равны S_1, S_2 и S_3, и три параллелограмма. Найдите: а) произведение площадей параллелограммов; б) площадь данного треугольника.

197. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Среднее арифметическое и среднее геометрическое площадей треугольников BOC и AOD равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

198. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что площадь треугольника ODC есть среднее геометрическое площадей треугольников OBC и OAD тогда и только тогда, когда $AD \parallel BC$.

199. Точка лежит на окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что произведение расстояний от этой точки до прямых AB и CD равно произведению расстояний от неё до прямых BC и AD.

200. На основании AD трапеции $ABCD$ отмечены точки M и N так, что четырёхугольник $MBCN$ — параллелограмм. Прямая AC пересекает отрезки BM и BD в точках P и O, а прямая BD пересекает отрезок CN в точке Q. Докажите, что площадь пятиугольника $MPOQN$ равна сумме площадей треугольников APB, BOC и CQD.

201. Меньшее основание AD прямоугольной трапеции $ABCD$ равно a, боковая сторона CD, не перпендикулярная к основаниям, равна $2a$, точка M — середина отрезка CD, угол CBM равен α. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

202. На сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки E и F так, что четырёхугольник $AECF$ — параллелограмм. Прямые BF и DE пересекаются в точке M. Докажите, что четырёхугольники $AEMF$ и $CBMD$ равновелики.

203. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки M и N так, что $AM = MN = NB$, а на стороне CD — точки P и Q так, что $CP = PQ = QD$. Докажите, что площадь четырёхугольника $MNPQ$ в 3 раза меньше площади четырёхугольника $ABCD$.

204. Точки M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, отрезки AN и DM пересекаются в точке P, а отрезки BN и CM — в точке Q. Докажите, что площадь четырёхугольника $MQNP$ равна сумме площадей треугольников APD и BQC.

205. На продолжении стороны AB параллелограмма $ABCD$ за точку B отложен отрезок BM. Прямые MC и AD пересекаются в точке N. Докажите, что площадь треугольника ABC равна среднему геометрическому площадей треугольников MBC и NCD.

206. Докажите, что площадь S произвольного четырёхугольника $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ удовлетворяет неравенству $S \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$.

207. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению её оснований.

208. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках, симметричных данной точке относительно середин сторон данного четырёхугольника с площадью S.

209. Выпуклый четырёхугольник с площадью S разбит диагоналями на четыре треугольника. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются точки пересечения медиан указанных треугольников.

210. Докажите, что площадь четырёхугольника, вписанного в окружность, выражается формулой $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p — полупериметр, а a, b, c, d — стороны четырёхугольника.

211. Отрезки AM и CN — высоты остроугольного треугольника ABC, точка O — центр описанной окружности. Угол ABC равен β, а площадь четырёхугольника $NOMB$ равна S. Найдите сторону AC.

212. Докажите, что при любом n длина окружности больше периметра P_n вписанного в неё 2^n-угольника, но меньше периметра Q_n описанного около неё 2^n-угольника.

213. Около треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Дуга ACB этой окружности и две полуокружности с диаметрами AC и CB, расположенные вне треугольника, ограничивают две луночки (на рисунке 118 они закрашены). Докажите, что сумма площадей этих луночек равна площади треугольника.

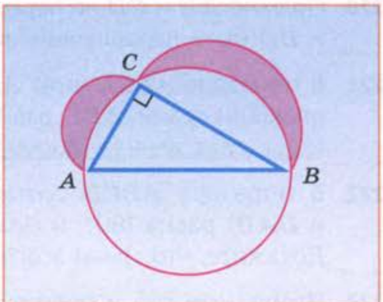


Рис. 118

214. На отрезке LN отмечена точка M, точки A, B и C — середины полуокружностей с диаметрами LM, MN и LN. Найдите отношение площади фигуры, ограниченной указанными полуокружностями, к площади треугольника ABC. Рассмотрите все возможные случаи расположения точек A, B и C относительно прямой LN.

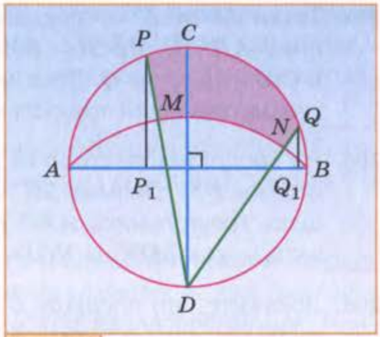


Рис. 119

215. Диаметры AB и CD данного круга взаимно перпендикулярны. На дуге ACB взяты произвольные точки P и Q, а внутри круга проведена дуга AB окружности с центром в точке D. Хорды DP и DQ пересекаются с этой дугой соответственно в точках M и N, точки P_1 и Q_1 — основания перпендикуляров, проведённых из точек P и Q к прямой AB. Докажите, что площадь криволинейного четырёхугольника $PQNM$ (фигура, закрашенная на рисунке 119) равна площади треугольника DP_1Q_1.

216. Постройте ромб, площадь которого равна площади данного квадрата, если известно, что отношение диагоналей этого ромба равно отношению данных отрезков.

217. Через данную точку внутри угла проведите прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

218. Начертите круг и постройте две окружности с тем же центром, разделяющие круг на три равновеликие части.

219. Постройте границу круга, площадь которого равна: а) площади данного полукруга; б) площади данного кругового сектора с дугой в 60°.

Глава 9

220. Прямые AB и CD не пересекаются и не параллельны. Могут ли прямые AC и BD быть параллельными?

221. В тетраэдре $ABCD$ углы ADB, ADC и BDC прямые. Докажите, что квадрат площади грани ABC равен сумме квадратов площадей остальных граней (пространственная теорема Пифагора).

222. В тетраэдре $ABCD$ сумма углов с вершиной A (т. е. углов BAC, CAD и DAB) равна 180°, и суммы углов с вершинами B и C также равны 180°. Докажите, что грани этого тетраэдра равны друг другу.

223. Изобразите куб и постройте такое его сечение, которое является: а) правильным треугольником; б) квадратом; в) правильным шестиугольником.

224. Может ли сечение параллелепипеда быть правильным пятиугольником?

225. Комната имеет форму куба. Паук, сидящий в середине ребра, хочет поймать муху, сидящую в одной из самых удалённых от паука вершин куба. Изобразите кратчайший путь паука и найдите длину этого пути, если ребро куба равно a.

226. Внутри выпуклой призмы выбрана точка. Докажите, что сумма объёмов пирамид, основания которых боковые грани призмы, а вершинами является выбранная точка, не зависит от выбора этой точки.

227. Внутри правильного тетраэдра выбрана точка, и из неё проведены перпендикуляры к плоскостям его граней. Докажите, что сумма длин этих перпендикуляров не зависит от выбора точки.

228. Отметьте четыре вершины куба так, чтобы они были вершинами правильного тетраэдра.

229. Плоскости AB_1C_1 и A_1BC разделяют треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ на четыре части. Найдите отношение объёмов этих частей.

230. Наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, в 2 раза больше площади сечения, содержащего высоту конуса. Найдите угол между осью конуса и образующей.

231. Правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания a и высотой h вращается вокруг прямой, проходящей через вершину пирамиды параллельно стороне её основания. Найдите объём тела, полученного при этом вращении.

Задачи с практическим содержанием

Глава 7

1. Пловец переплывает реку шириной 50 м за 1 мин 40 с. Скорость течения реки равна 1 м/с. Найдите: а) тангенс угла между вектором скорости реки и направлением результирующего движения пловца (с учётом сноса по течению); б) величину скорости движения пловца в этом направлении.

2. Скорость пловца в стоячей воде равна 1 м/с, скорость течения реки в 2 раза меньше. Под каким углом к направлению течения реки должен быть направлен вектор скорости пловца, чтобы его результирующее движение (с учётом сноса по течению) происходило в направлении, перпендикулярном к берегу? Окажется ли пловец на другом берегу через 2 мин после старта, если ширина реки равна 90 м?

3. Волк, находясь в 15 м от дороги, увидел прямо перед собой сидящего на дороге зайца. В тот же момент заяц сорвался с места и побежал по дороге со скоростью 5 м/с, но через 4 с был пойман бросившимся в погоню волком. Найдите: а) расстояние, которое пробежал волк; б) косинус угла между векторами скоростей волка и зайца.

4. Два посёлка расположены по разные стороны реки. Где следует построить мост, чтобы путь из одного посёлка в другой был самым коротким, если берега реки — параллельные прямые, а мост строится перпендикулярно к ним?

5. Угол в 1° рассматривают в лупу, увеличивающую в 4 раза. Какой величины покажется угол?

6. **Солнечные сутки и звёздные сутки.** Солнечные сутки — это время, за которое Земля совершает один оборот вокруг своей оси относительно Солнца, а звёздные сутки — то же самое относительно звёзд. Поясним, в чём здесь разница. Пусть A — ближайшая к Солнцу точка Земли в положении 1 (рис. 120). Чтобы прошли одни солнечные сутки, точка A снова должна оказаться ближайшей к Солнцу, т. е. Земля должна переместиться в положение 3. Но чтобы прошли одни звёздные сутки, Земля должна переместиться в положение 2. Чего в году больше и на сколько: звёздных суток или солнечных? (Земля вращается вокруг своей оси в том же направлении, в котором движется вокруг Солнца.)

Глава 8

1. Два участка земли огорожены заборами одинаковой длины. Первый участок имеет форму прямоугольника с неравными смежными сторонами, а второй — форму квадрата. Площадь какого участка больше?

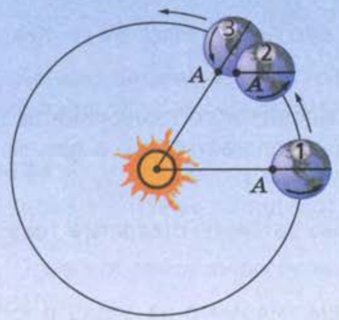


Рис. 120

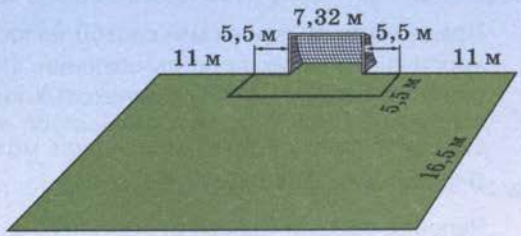


Рис. 121

2. Два участка земли, один из которых имеет форму прямоугольника с неравными смежными сторонами, а другой — форму квадрата, равновелики. Для какого участка при сооружении забора потребуется больше строительного материала?

3. На рисунке 121 указаны ширина ворот футбольного поля (7 м 32 см) и размеры вратарской и штрафной площадок, каждая из которых имеет форму прямоугольника. Не вычисляя точные значения площадей, ответьте на вопрос: верно ли, что площадь штрафной площадки превосходит площадь вратарской площадки: а) более чем в 6 раз; б) более чем в 7 раз?

4. Диаметр автомобильного колеса равен 50 см. Сколько оборотов в минуту делает колесо при скорости автомобиля 50 км/ч?

5. Если обтянуть земной шар по экватору верёвкой, а затем увеличить её длину на 1 м, то сможет ли между верёвкой и землёй проскочить мышь?

6. Сектор ограничен радиусами OA и OB и дугой окружности в 120°. Какой путь от A к B короче: по дуге окружности или по радиусам сектора?

7. Круглый стол диаметром 2 м накрыт скатертью, имеющей форму квадрата со стороной 2,5 м. Какая часть скатерти больше: лежащая на столе или свешивающаяся?

Глава 9

1. Полый шар радиуса 9 см, толщина стенок которого равна 3 см, плавает в воде, причём из воды выступает половина шара. Найдите плотность материала, из которого изготовлен шар (плотность воды равна 1 г/см^3).

2. На рынке продаются два арбуза. Один из них на четверть шире другого и стоит в 1,5 раза дороже. Какой из арбузов выгоднее купить?

3. При росте человека 165 см нормальным весом считается 57 кг. Каков нормальный вес при росте 170 см?

4. Предложите практический способ непосредственного измерения диагонали кирпича без каких-либо вычислений. (Предполагается, что в вашем распоряжении есть несколько одинаковых кирпичей.)

5. Сделайте рисунок пробки, которой можно заткнуть отверстия трёх видов: треугольное, квадратное и круглое.

6. Человек прошёл километр на север, затем километр на запад и километр на юг. Мог ли он при этом вернуться в исходное положение?

7. Можно ли куб с ребром 10 см завернуть в квадратный платок со стороной 30 см?

8. Можно ли соединить 10 резиновых колец так, чтобы их нельзя было расцепить, но после разрезания любого из них они расцеплялись бы все?

Проектные задачи

Проектные задачи выполняются с использованием учебно-методического комплекта «Живая математика».

Глава 7

1. а) Задайте систему координат и постройте точки $A(3;\ 6)$, $B(2;\ 9)$, $C(7;\ 8)$ и $D(8;\ 5)$.

б) Отметьте точку пересечения отрезков AC и BD и измерьте её координаты.

2. а) Проведите прямую и отметьте её как ось отражения.

б) Отметьте точку и отразите её относительно отмеченной оси.

в) Постройте два отрезка, общим концом которых служит отмеченная точка, и отразите их относительно отмеченной оси.

г) Подвигайте концы отрезков и отмеченную ось так, чтобы в процессе движения отрезки пересекали ось.

д) Объясните, почему точка пересечения исходного отрезка и симметричного ему отрезка (когда они пересекаются) лежит на оси отражения.

3. а) Нарисуйте два отрезка с общим концом и отметьте их.

б) Отметьте центр поворота и поверните вокруг него отмеченные отрезки сначала на 90°, а затем ещё на 30°.

в) Подвигайте концы отмеченных отрезков и центр поворота так, чтобы в процессе движения центр поворота оказался на одном из отмеченных отрезков.

г) Объясните, почему когда один из отмеченных отрезков проходит через центр поворота, повёрнутый отрезок также проходит через центр поворота.

4. а) Нарисуйте треугольник и отметьте его стороны.

б) Отметьте центр гомотетии и сделайте гомотетию с отмеченным центром и коэффициентом $\frac{1}{2}$.

в) Подвигайте вершины треугольника и центр так, чтобы: одна из сторон треугольника проходила через отмеченный центр; одна из вершин треугольника совпадала с центром.

Исследовательские задачи

1. Исследуйте расположение семейства окружностей Аполлония для данных точек A и B и различных значений k.

2. Исследуйте расположение семейства множеств точек M, заданных уравнением $AM^2 + BM^2 = k = \mathbf{const}$ для данных точек A и B и различных значений k.

3. Исследуйте положение радикальной оси двух окружностей в зависимости от их расположения.

4. а) Докажите, что любое движение плоскости является последовательным выполнением не более чем трёх осевых симметрий. б) Докажите, что любое движение плоскости является параллельным переносом, поворотом или последовательным выполнением симметрии относительно прямой и параллельного переноса на вектор, параллельный этой прямой.

5. Выразите площадь выпуклого четырёхугольника: а) через стороны и углы; б) через стороны и угол между диагоналями.

Темы рефератов и докладов

1. Окружности Аполлония и связанные с ними задачи.
2. Радикальная ось и радикальный центр окружностей, их использование при решении задач.
3. Теоремы Чевы и Менелая в векторной форме.
4. Применение геометрических преобразований при решении задач.
5. Применение геометрических преобразований в задачах на построение.
6. Решение задачи Эйлера (о прямой Эйлера и окружности Эйлера) с помощью центрального подобия.
7. Различные формулы площадей четырёхугольников.
8. Равновеликие и равносоставленные многоугольники. Теорема Бойяи — Гервина.
9. Многоугольники на решётке. Формула Пика.
10. Изопериметрические задачи.
11. Пространственная теорема Пифагора (различные формулировки).

О длине окружности*

В пункте 110 мы сказали, что точное значение длины окружности — это предел, к которому стремится периметр P_n правильного вписанного в окружность 2^n-угольника при неограниченном увеличении числа n. Уточним, что имелось в виду.

Рассмотрим сначала квадрат, вписанный в окружность радиуса R. Проведя серединные перпендикуляры к его сторонам и отметив точки их пересечения с описанной окружностью, построим правильный вписанный восьмиугольник (рис. 122). Его периметр больше периметра квадрата (пользуясь неравенством треугольника, докажите это самостоятельно). Удвоив таким же образом число сторон, получим правильный вписанный шестнадцатиугольник, периметр которого больше периметра восьмиугольника. Продолжив этот процесс, составим возрастающую последовательность P_n периметров правильных вписанных в данную окружность 2^n-угольников ($n = 2, 3, 4, ...$): $P_2 < P_3 < P_4 < ...$.

Рассмотрим теперь квадрат, описанный около той же окружности. Проведём биссектрисы его углов и через точки их пересечения с данной окружностью проведём касательные к окружности. Отрезав по этим касательным от квадрата прямоугольные треугольники, получим правильный описанный восьмиугольник (рис. 123), периметр которого, очевидно, меньше периметра описанного квадрата. Удвоив указанным способом число сторон, получим правильный описанный шестнадцатиугольник, периметр которого меньше периметра описанного восьмиугольника. Продолжив этот процесс, составим убывающую последова-

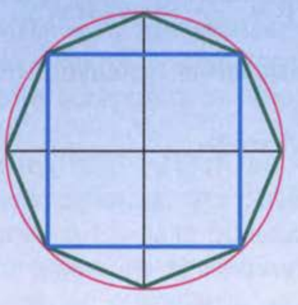


Рис. 122

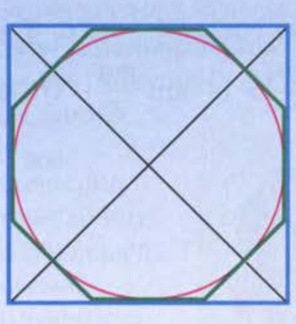


Рис. 123

тельность Q_n периметров правильных описанных около данной окружности 2^n-угольников ($n = 2, 3, 4, ...$): $Q_2 > Q_3 > Q_4 > ...$.

Отметим, что при любом n имеет место неравенство $P_n < Q_n$, вытекающее, например, из подобия любых двух правильных 2^n-угольников. Следовательно, при любом n справедливо неравенство $P_n < Q_2$ (так как $P_n < Q_n < Q_2$).

На произвольном луче с началом O отложим отрезки OA_2 длины P_2, OA_3 длины P_3, ..., а также отрезок OB длины Q_2. Множество точек O, A_2, A_3, ... ограничено — все они содержатся в отрезке OB. Следовательно, существует наименьший отрезок OC, содержащий все эти точки. Длина отрезка OC и принимается за длину окружности.

Так как последовательность длин отрезков OA_2, OA_3, ..., OA_n, ... (т. е. последовательность P_2, P_3, ..., P_n, ...) возрастающая, то последовательность длин отрезков A_2C, A_3C, ..., A_nC, ... — убывающая, а поскольку OC — наименьший из отрезков, содержащих в себе точки O, A_2, A_3, ..., то длина отрезка A_nC при возрастании n становится сколь угодно малой. Иными словами, величина A_nC стремится к 0 при n, стремящемся к бесконечности. Следовательно, $OA_n = P_n \to OC$ при $n \to \infty$. Это и означает, что точное значе́ние длины окружности — это предел, к которому стремится периметр P_n правильного вписанного в окружность 2^n-угольника при неограниченном увеличении числа n.

Замечание 1. Так как $P_n = 2^n \cdot 2R \sin \frac{180°}{2^n} \to 2\pi R$ при $n \to \infty$, то

$$\sin \frac{180°}{2^n} = \frac{P_n}{2R \cdot 2^n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Замечание 2. Рассмотрим прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 1, и острым углом, равным α. Его катеты равны $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Из неравенства треугольника следует, что $\cos\alpha + \sin\alpha > 1$, поэтому $\cos\alpha > 1 - \sin\alpha$. В частности, при $\alpha = \frac{180°}{2^n}$ получаем: $\cos \frac{180°}{2^n} > 1 - \sin \frac{180°}{2^n}$. Отсюда с учетом замечания 1 следует, что

$$\cos \frac{180°}{2^n} \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

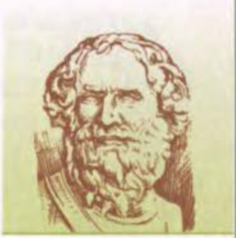
Историческая справка

Первоначальный очерк истории геометрии приведён в учебнике 7 класса. Теперь, когда вы познакомились со многими новыми понятиями, историю геометрии можно обсудить более полно.

Уже при самом зарождении геометрия изучала площади и объёмы. В Древнем Египте и Вавилонии умели вычислять площадь треугольника и трапеции, а площадь круга вычисляли приближённо; умели вычислять также объём пирамиды. Математика в этих государствах была догматической — правила использовались без какого-либо их обоснования. Это было связано с деспотическим строем, требовавшим жёсткого подчинения. Математикам не нужно было убеждать других в истинности их правил и методов, никто не отваживался с ними спорить.

Жаркие споры с целью выяснения истины и правильных способов рассуждений велись в Древней Греции, и именно в таких спорах возникли геометрические рассуждения и доказательства. Фалес Милетский доказывал очень простые и очевидные на первый взгляд теоремы. Он осознал, что очевидность может оказаться обманчивой и доказывать нужно даже очевидные утверждения. Это было очень важным шагом в становлении математики.

Древнегреческие математики не только обосновали правила вычисления площадей, применявшиеся в Древнем Египте и Вавилонии, но и продвинулись далеко вперёд. Для вычисления площади круга и объёма пирамиды Евдокс Книдский разработал специальный метод, впоследствии получивший название метода исчерпывания. Труды самого Евдокса не сохранились, но его результаты детально изложены в «Началах» Евклида. Значительная часть «Начал» посвящена стереометрии; они завершаются теорией правильных многогранников.



Архимед

Архимед (287—212 гг. до н. э.) первым вычислил объём шара, доказав, что объём цилиндра, описанного вокруг шара, в 1,5 раза больше объёма шара. Архимед считал это одним из важнейших своих достижений и даже завещал установить на его надгробии цилиндр и шар; по этому знаку впоследствии Цицерон нашёл на Сицилии заброшенную и заросшую терновником могилу Архимеда. Архимед сумел также найти площадь и объём нескольких сложных геометрических фигур, и эти результаты очень долго оставались непревзойдёнными.

Архимед получил весьма точные оценки числа π, рассматривая правильные многоугольники, вписанные в окружность, и правильные многоугольники, описанные около окружности. Он доказал, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Несколько изящных геометрических теорем Архимед собрал в «Книгу лемм», сохранившуюся только в арабском переводе. Ещё несколько теорем Архимеда сохранилось в изложении аль-Бируни (973—1048). Когда были обнаружены и переведены сочинения аль-Бируни, выяснилось, что задолго до Герона Архимед вывел формулу, выражающую площадь треугольника через длины его сторон; ныне её называют формулой Герона.

Архимед обнаружил 13 полуправильных многогранников, грани которых правильные многоугольники, но необязательно равные. Четырнадцатый полуправильный многогранник был обнаружен лишь в 1957 г. советским математиком В. Г. Ашкинузи.

Древний Рим, многое перенявший из культурного наследия Древней Греции, оказался совершенно невосприимчивым к математике. Геометрия там не только не развивалась, но даже почти не изучалась. По свидетельству Цицерона, в Древнем Риме развитие математики ограничивалось надобностями денежных расчётов и земельных межеваний. Но уже сами эти слова Цицерона показывают, что говорить в такой ситуации о развитии математики — сильное преувеличение.

Греческие традиции изучения геометрии в большей степени, чем в средневековой Европе, распространились в арабских странах. Многие труды греческих геометров сохранились лишь в арабских переводах. Арабские математики не только переводили и комментировали сочинения древнегреческих геометров, но и сами получали важные результаты. Исследованием пятого постулата Евклида занимались Сабит ибн Курра (836—901) и Омар Хайям. Аль-Каши с большой точностью вычислил число π. Абу-ль-Вафа изучал задачи на построение циркулем фиксированного раствора.

Омар Хайям

Независимо от Древней Греции геометрия развивалась в Китае и в Индии. В Китае в первые века нашей эры умели вычислять площадь круга, объём цилиндра, усечённого конуса и усечённой пирамиды.

Индийский математик Брахмагупта (598—660) детально изучил свойства вписанных четырёхугольников.


Декарт

Возрождение математики в Европе началось с изучения трудов древнегреческих математиков и с переводов их на латинский язык. Первым важным достижением европейских математиков в геометрии было введение координат на плоскости французскими математиками Рене Декартом (1596—1650) и Пьером Ферма (1601—1665). Метод координат позволил связать геометрию с алгеброй. Интересно, что для Декарта основным стимулом для введения координат послужила следующая задача, предложенная древнегреческими геометрами: найти множество всех точек, для каждой из которых произведение расстояний до двух данных прямых равно произведению расстояний до двух других данных прямых. Ферма тоже внимательно изучал труды древнегреческих математиков, делая на полях замечания о своих обобщениях их результатов. Идея ввести координаты не только на плоскости, но и в пространстве встречается уже у Декарта и Ферма, но разработал эту идею и применил на практике французский математик и физик Алексис Клод Клеро, много занимавшийся вопросом о том, какую форму имеет Земля — сколь существенно отличается она от шара.


Эйлер

Декарт занимался также исследованием выпуклых многогранников. Он установил в 1620 г., что число вершин V, число рёбер E и число граней F связаны соотношением $V - E + F = 2$, но не опубликовал этот результат. В 1758 г. эту формулу переоткрыл Эйлер, и теперь её обычно называют формулой Эйлера.

Геометрия была настолько важной составляющей частью математики, что в XIX в. всех математиков, даже занимавшихся в основном алгеброй или анализом, называли геометрами.

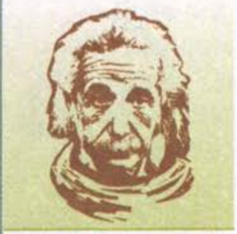
Понятие вектора в математику и физику ввёл ирландский математик Уильям Роуан Гамильтон (1805—1865), но некоторое представление о векторах задолго до него имели Галилей и Ньютон. Гамильтон определял векторы с помощью координат. Такой подход позволил рассматривать векторы не только с двумя или тремя координатами, но и с любым числом координат. Так Гамильтон смог ввести понятие n-мерного пространства, в котором векторы имеют n координат. Одновременно с Гамильтоном понятие многомерного пространства ввёл немецкий математик Герман Грассман (1809—1877). Подход


Риман

Грассмана был более абстрактный и сначала воспринимался математиками с большим трудом, но впоследствии этот подход оказался очень плодотворным и нашёл широкое применение не только в геометрии, но и в алгебре.

В 1854 г. немецкий математик Бернхард Риман обобщил понятие многомерного пространства и разработанную К. Р. Гауссом теорию поверхностей. Введённые им пространства, получившие название римановых, широко применяются в современной физике. Именно в терминах римановых пространств формулируется общая теория относительности Эйнштейна.

Большую роль в формировании современного представления о геометрии сыграла так называемая эрлангенская программа немецкого математика Феликса Клейна (1849—1925). В ней Клейн предложил систематизацию геометрии на основе движений. По мнению Клейна, важнейшая задача геометрии — изучение свойств, сохраняющихся при движениях. Под геометрией Клейн подразумевал не только евклидову геометрию, но и другие геометрии — геометрию Лобачевского, геометрию на сфере, проективную геометрию.


Эйнштейн

Не следует думать, что к настоящему времени развитие геометрии завершено, что всё, что можно, в ней открыто и обосновано. Геометрия, как и другие науки, успешно развивается и обогащается новыми крупными результатами, расширяет сферу своих приложений и находит всё новых и новых приверженцев.

Заключение

Дорогие школьники!

Вы закончили путешествие по замечательной стране с названием «Планиметрия». Надеемся, что вам понравились её достопримечательности и многие из них вы надолго сохраните в своей памяти. Не сомневаемся, что вы испытывали большое удовлетворение, когда удавалось решить трудную геометрическую задачу. Надеемся также, что геометрия помогла вам развить логическое мышление, потребность обосновывать высказанные утверждения, и не только математические.

Тем, кому уроки геометрии доставляли удовольствие, хотим сказать, что страна «Планиметрия» гораздо шире, чем та её часть, которая была представлена в учебниках 7—9 классов. Проявляющим интерес к геометрии мы советуем почитать дополнительную литературу, она указана в конце каждого учебника. В ней вы найдёте много интересного.

Кое-что из планиметрии в дополнение к изученному в 7—9 классах будет изложено в учебнике геометрии для 10—11 классов. Но в основном в старших классах вы будете изучать геометрию в пространстве, т. е. стереометрию. Некоторые сведения из стереометрии были изложены в последней главе этого учебника.

Подводя итог изученному в курсе геометрии 9 класса, перечислим то основное, что вы должны были усвоить и что понадобится вам в старших классах.

- Как вводится прямоугольная система координат, что такое координаты точки, как получаются и какой вид имеют уравнение прямой и уравнение окружности.
- Что такое векторы, как они складываются, вычитаются, умножаются на числа, что такое скалярное произведение векторов и как оно выражается через координаты сомножителей.
- Что означают слова «отображение плоскости на себя»; что такое движение, осевая симметрия, параллельный перенос на данный вектор, поворот вокруг данной точки на данный угол, центральная симметрия; что такое преобразование подобия и его частный случай — центральное подобие (или гомотетия), какие две фигуры называются подобными.
- Как измеряются площади плоских фигур и какими формулами выражаются площади прямоугольника, параллелограмма, трапеции,

треугольника. В отношении треугольника вы должны знать несколько формул, в том числе формулу, выражающую площадь треугольника через две стороны и угол между ними, формулу Герона, а также формулы, в которые входят радиусы вписанной и описанной окружностей.

- Какими формулами выражаются длина окружности и площадь круга, что такое число π и каково его приближённое значение.
- Что такое пирамида, призма, параллелепипед, цилиндр, конус, шар, какими формулами выражаются объёмы перечисленных тел и площади поверхностей тел вращения.

Дорогие школьники! Мы поздравляем вас с окончанием 9 класса, желаем вам хорошего отдыха на каникулах и больших успехов в дальнейшей учёбе в старших классах. Мы надеемся, что наши учебники геометрии помогут вам получить хорошее школьное образование — основу успехов во всей вашей дальнейшей жизни.

Авторы

Ответы и указания

Глава 7

1. а) $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $C(0;\ h)$. б) $M(2;\ -2{,}5)$. в) $A(-10;\ -11)$. г) $D(2;\ 5)$. д) $C(6;\ 7)$, $D(-2;\ -1)$. е) $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 3)$, $B(3;\ 3)$, $C(5;\ 0)$, $(1{,}5;\ 1{,}5)$, $(2{,}5;\ 1{,}5)$. ж) $C(-4;\ -2)$, $D(-7;\ -2)$. **2.** а) 6 и 5. б) $M\left(\frac{a}{2};\ -\frac{b}{2}\right)$. в) $A(1-a;\ b+1)$. г) $B(0;\ 5)$, $C(-5;\ 0)$, $D(0;\ -5)$ или $B(0;\ -5)$, $C(-5;\ 0)$, $D(0;\ 5)$. д) $A(4;\ 9)$, $D(-8;\ -7)$. е) $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 4)$, $B(-8;\ 4)$, $C(-2;\ 0)$, $(-4;\ 2)$, $(-1;\ 2)$. ж) $B(3\sqrt{3};\ -3)$, $C(6+3\sqrt{3};\ -3)$. з) $a=-7$, $b=3$. **3.** б) $\overrightarrow{DC}$. в) Ромб. **4.** б) $\overrightarrow{OB}$. в) Трапеция.

5. а) Равны по модулю и противоположны по знаку. б) $\{-1;\ 0\}$; $(5;\ -7\}$. в) Нет. д) Да. **6.** б) $(2;\ 2)$; $(0;\ 7)$. в) Да. д) $a=0$, $b=-1$. **7.** а) $\sqrt{13}$, $4\sqrt{3}$, 0. б) $4\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$. в) $(5;\ 0)$ или $(-5;\ 0)$. г) 45°; 180°. д) 135°, 22°30′, 22°30′. **8.** а) $2\sqrt{2}$, 5. б) 17 и 13. в) $(6;\ 0)$ и $(0;\ 6)$. г) 0°; 90°. д) $(1;\ \sqrt{3})$, 10, 60°, 120°, 60°, 120°. **9.** а) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$. б) $(2;\ -4)$, $2\sqrt{5}$. Да. в) $(x-3)^2+(y-4)^2=8$. д) Прямоугольный; $(0{,}5;\ 1{,}5)$, $0{,}5\sqrt{10}$. е) Окружность радиуса 3 с центром C. **10.** а) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 0{,}25$. б) $(-1;\ 2)$, $2\sqrt{10}$. Да. в) $(x+3)^2+(y-2)^2=50$. г) $(4;\ 0)$, 1. д) $\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+y^2=\frac{625}{64}$. е) Окружность радиуса 2, центр которой делит отрезок AC в отношении 1 : 3, считая от точки A. **11.** а) $3x+4y+1=0$ и $x+y-7=0$. $-\frac{3}{4}$ и -1. Пересекаются. б) $x+5y-12=0$. в) Касаются друг друга. **12.** а) $2x-y-2=0$, $2x-y+1=0$ и $2x-y-5=0$. Угловые коэффициенты равны. б) $3x+4y-25=0$. в) 1,2. **13.** а) $\vec{0}$. в) Да. г) $\{3;\ 2\}$ и $\left\{3\frac{2}{3};\ -5\right\}$. д) $\overrightarrow{AC}$. е) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. ж) Да. **14.** а) $\overrightarrow{CB}$. г) $\left\{\frac{2}{3};\ 7\right\}$, $\{-2{,}7;\ 10{,}1\}$ и $\{0{,}3;\ -1{,}9\}$. е) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$. ж) Да. **15.** б) $\vec{0}$; $\overrightarrow{AK}$. г) $\{7;\ -2\}$, $\left\{-4\frac{2}{3};\ 3\frac{2}{5}\right\}$ и $\{7;\ -1{,}8\}$. д) $\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{AM}$. е) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BD}$. ж) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

16. б) $\overrightarrow{CP}$; $\overrightarrow{PQ}$. г) $\{5;\ -1{,}2\}$, $\left\{-\frac{1}{3};\ -2{,}2\right\}$ и $\{7;\ -2{,}2\}$. д) $\overrightarrow{AB}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}$. е) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$. **17.** в) $\{0;\ 5\}$; $\{-3;\ 2\}$. г) Да; нет. е) $5\vec{n}-9\vec{m}$. ж) $\vec{0}$. з) -2; 0,25; 0,75; 0,5; 3; не существует. **18.** в) $\{7{,}8;\ 2{,}5\}$ и $\{-3;\ 9\}$. г) Нет; да; нет. е) $2\vec{p}-13\vec{m}-3\vec{n}$. з) -2; -2; $-0{,}5$; 0,5; не существует. **19.** а) 0; 0,5; 1. б) -1; -2;

1; 2; $\sqrt{2}$. в) 4; 2; 2,5. г) 20. д) 32; –9; 0. е) –9; 24; 12. ж) –3 и 0,8. **20.** а) 0,5, –0,25; –0,5. б) Тупой; острый; тупой. в) $x < -2{,}2$; $x = -2{,}2$; $x > -2{,}2$. г) –5. д) –128; 72; 0. е) –75; –144; –75. ж) 13 и $\frac{2}{13}\sqrt{13}$. **21.** а) $\overrightarrow{AC} = \vec{x} + \vec{y}$, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{x} + 0\vec{y}$, $\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\vec{x} + \vec{y}$, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CO} = -\frac{3}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$. б) $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. в) $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = 0\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$. д) $\overrightarrow{BN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. **22.** а) $\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$, $\overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\vec{x} - \vec{y}$, $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{6}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$, $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{3}{2}\vec{y}$. б) $\overrightarrow{CM} = \vec{a} + 0\vec{b}$, $\overrightarrow{MD} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. в) $\vec{a} = -5\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = 0\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$. г) $\vec{a} = 1{,}5\vec{i} + 0{,}5\vec{j}$, $\vec{b} = -1{,}3\vec{i} + 1{,}1\vec{j}$. д) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AD}$. **33.** $x^2 + (y-4)^2 = 25$. **34.** Да.

35. $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$. Указание. Воспользоваться тем, что данный треугольник равнобедренный. **38.** Окружность с центром O радиуса $\sqrt{\frac{k^2 - 2a^2}{2}}$, если $k^2 > 2a^2$, или точка O, если $k^2 = 2a^2$, где O — середина отрезка AB и $a = \frac{1}{2}AB$; если $k^2 < 2a^2$, то точек, удовлетворяющих условию задачи, нет.

39. $x - 2y = 0$. **40.** $x - 2y + 2 = 0$. **41.** $x + 2y - 4 = 0$; (–4; 4). **42.** Не имеют общих точек. **43.** $x^2 + y^2 = \frac{169}{25}$. **44.** а) Да. б) Да. **56.** –4. **57.** $-m^2$. **60.** 4.

64*. Указание. Рассмотреть параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{BC}$ и воспользоваться теоремой о пересечении высот треугольника. **65*.** Указание. Рассмотреть симметрию относительно прямой a. **66*.** Два. Указание. Рассмотреть поворот на 60° вокруг точки A. **67*.** Указание. Наряду с данным преобразованием подобия с коэффициентом k рассмотреть центральное подобие с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Глава 8

69. б) 20 м. в) Увеличится в k раз; увеличится в k^2 раз; не изменится, г) 21 см². д) 2 см и 7 см. е) Площадь квадрата больше площади прямоугольника. **70.** б) 6 см. в) 20 см. г) 27 см². е) В 2 раза. **71.** а) 8 см. г) 10 см². е) 15 см². **72.** а) 22 см. г) $3S$. **73.** б) Площадь прямоугольника больше площади параллелограмма. в) 10 см². **74.** б) Площадь ромба больше площади параллелограмма. в) 45°, 135°, 45°, 135°. **75.** а) 5 см. б) 7,5 см². в) 2 см. г) 24 см². е) h^2.

76. а) 5 см и 7 см. б) 5 см. в) 6 см². г) am. д) $S_1 + S_2$. е) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. **77.** а) Увеличится в 3 раза; уменьшится в 2 раза; увеличится в k раз; уменьшится в k раз. б) Увеличится на 2π см. в) $\sqrt{2}l$. г) 2 см. **78.** а) Увеличится в k раз; уменьшится в k раз. б) Уменьшится на $\dfrac{1}{2\pi}$ см. в) $2l$. г) 45°. **79.** а) $\dfrac{\pi a^2}{12}$; $\dfrac{\pi a^2 \sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$. б) 14 см². в) 6 см. **80.** а) $\dfrac{\pi a^2 \sin^2\alpha}{4\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}$; $\dfrac{\pi a^2}{4}\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$. б) 2 см. в) 9 см². **85.** Указание. Сначала на сторонах BC и CD данного квадрата $ABCD$ построить точки M и N так, чтобы $BM = \dfrac{2}{3}BC$, $DN = \dfrac{2}{3}DC$. **86.** 84 см². **88.** $\dfrac{1}{3}S$.

89. $\sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}$. **90.** 0,75. **91.** а) $2\sqrt{3}r$, $6\sqrt{3}r$, $3\sqrt{3}r^2$. б) $\sqrt{3}R$, $3\sqrt{3}R$, $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

92. 29 см. **93.** a^2. **94.** 48 см². **95.** 60 см². **96.** $\dfrac{1}{4}a(a+b)$. **97.** $S_1 + S_2$ или $\dfrac{1}{2}(S_1+S_2)$. **98.** 27 см². **99.** 75°, 105°, 105°, 75°. **100.** $\dfrac{1}{2}a^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha$.

101. 30° или 150°. **102.** Указание. Воспользоваться формулой Герона.

103. а) $4{,}8\pi$ см. б) $\pi a\sin\alpha$. **104.** l. **105.** а) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$. б) $\dfrac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$.

106. $\left(2\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1\right)c$. **107.** $(\sqrt{2}-1)c$. **108.** а) $\dfrac{\pi(a^2+b^2)}{4}$. б) $\dfrac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}$. в) $\dfrac{\pi(a^2+4h^2)^2}{64h^2}$.

111. $\left(4\sqrt{3}-\dfrac{11}{6}\pi\right)r^2$. **113.** $\dfrac{R^2}{27}(2\pi+3\sqrt{3})$.

Глава 9

117. а) V_1+V_2-V. в) $18\sqrt{3}$ см². г) $\dfrac{4\cos^2\alpha}{3(1-2\cos^2\alpha)}h^3$. **118.** а) $\dfrac{1}{2}(V_1+V_2+V_3)$. в) 6 см². г) $\dfrac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{3-4\cos^2\alpha}h^3$. д) $6\sqrt{39}$; $12\sqrt{3}$. **119.** б) 36. в) $(144+15\sqrt{3})$ см²; $\dfrac{135\sqrt{3}}{2}$ см³. г) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. д) Параллелограмм. е) $(10+12\sqrt{2})$ см. **120.** б) 32 см²; 6 см. в) $48\sqrt{33}$; $288\sqrt{11}$. г) $\dfrac{\sqrt{11}}{4}a^2$. **121.** а) 8π см³. б) $3\sqrt{3} : 2\pi$. в) $32\pi^2$ см². г) 1.

122. а) 3 см. б) $\pi : 2\sqrt{2}$. в) $2(k+1)$. г) $1 : k$. **123.** а) 18π см³. б) 16π см³. в) 1 : 2.

124. а) 1,5 см. б) 2π м² и $\pi\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ м³. **125.** а) 4 см. б) 9. в) 2. д) 3. **126.** а) $m^2 : n^2$.

б) $\frac{16}{3}\pi$ дм^3. в) 1 : 2. **129.** 45. **130.** $\frac{\sqrt{2}}{16}(a+b)^3$. **131.** $\frac{7}{4}S$. **132.** 1 : 19. **144.** 8π. **145.** 150π. **146.** $(3+\sqrt{2})\pi a^2$. **147.** 96π. **148.** $\pi : 4$. **149.** 4π. **150.** 27π.

Задачи повышенной трудности

151. Указание. Для доказательства первой части утверждения взять в качестве точки M точку B; для доказательства второй части утверждения ввести прямоугольную систему координат с положительной полуосью AC. **152.** Указание. Для каждого параллелограмма записать равенство двух векторов, начало и конец каждого из которых — вершины параллелограмма. **153.** Указание. Сначала доказать, что если точки M и N симметричны относительно середины отрезка AB, то $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$. **154.** Указание. Выразить вектор $\overrightarrow{FG}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DE}$. **155.** Указание. Записать систему уравнений для координат центра описанной окружности. **156.** Указания. а) Задать прямоугольную систему координат с началом в точке A так, чтобы точка B лежала на оси координат. б) Воспользоваться теоремой, обратной теореме Пифагора. **157.** Прямая, перпендикулярная к прямой AB. **158.** Окружность, точка или пустое множество. **159.** Указание. Воспользоваться задачей 156. **160.** Указание. Воспользоваться задачей 17 и). **161.** Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$. **162.** Указание. Воспользоваться методом координат. **163.** $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **164.** Указание. Сначала доказать, что $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}$. **165.** Указание. Провести через точку M прямую, параллельную AB, и воспользоваться утверждением задачи 164 применительно к двум образовавшимся параллелограммам. **166.** Указание. Рассмотреть окружность, симметричную одной из данных окружностей относительно общей точки окружностей. **167.** Указание. Сначала построить окружность, симметричную меньшей из данных окружностей относительно произвольной точки этой окружности. **168.** Указание. Сначала построить точки, симметричные отмеченной точке относительно данных прямых. **169.** Указание. Рассмотреть симметрию относительно точки пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника. **170.** $4R\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$. Указание. Рассмотреть точки M_1 и M_2, симметричные точке M относительно прямых AB и AC. **171.** Указание. а) Рассмотреть поворот на 90° вокруг вершины A. **172.** Указание. Рассмотреть поворот на $\frac{360°}{n}$ вокруг точки O. **173.** Указания. а) Рассмотреть поворот на 60° вокруг точки A. в) Воспользоваться задачей 173 б). г) Воспользоваться задачей 173 б). д) Рассмотреть поворот на 60° вокруг точки A. **174.** Указание. Рассмотреть симметрию относительно точки M. **175.** Указание. Построить точку, симметричную точке M относительно прямой a, и провести через неё прямую, параллельную MN. **176.** Указание. Рассмотреть центральное подобие с коэффициентом $-\frac{1}{2}$, центром которого является точка пересечения медиан треугольника. **177.** Указание. Рассмотреть центральное подобие, центром которого является точка пересечения диагоналей трапеции, и центральное подобие, центром которого является точка пересечения продолжений её боковых сторон. **178.** Указание. Рассмотреть центральное подобие с коэффициентом $\frac{1}{3}$, центром которого является середина стороны данного треугольника, и воспользоваться задачей 173. **179.** Указания. а) Доказать, что в результате последовательного выполнения поворота на 45° вокруг вершины A и центрального подобия с центром A и коэффициентом $\sqrt{2}$ отрезок O_BO_C переходит в тот же отрезок, что и отрезок AO_A в результате последовательного выполнения поворота на 45° вокруг вершины B и центрального подобия с центром B и коэффициентом $\sqrt{2}$. б) Воспользоваться задачей 179 а). **180.** Указание. Пусть O — центр указанной окружности, K — точка её касания с описанной окружностью; пользуясь тем, что четырёхугольники $ABKC$ и $AMON$ центрально-подобны, рассмотреть центральное подобие с центром A, при котором точка K переходит в середину основания BC. **181.** Указание. Провести окружность с центром на стороне BC, касающуюся прямой AB, и рассмотреть центральное подобие с центром B. **182.** Нет. **183.** Указание. б) Применить результат задачи 183 а) к треугольнику, образованному прямыми AB, CD и EF, и к треугольнику, образованному прямыми BC, DE и FA. **184.** Указание. Сначала доказать, что треугольники APQ и DPQ равновелики. **185.** $\frac{3}{4}S$. **186.** Указание. Вычесть из площади параллелограмма площади четырёх треугольников. **187.** Указание. Рассмотреть параллелограмм $ABDC$. **188.** Четыре луча с началом O. **189.** Указание. Сначала доказать, что $S_{AEF} = S_{CEF}$ и $S_{BEF} = S_{DEF}$. **190.** 5. **191.** Указание. Воспользоваться теоремой о биссектрисе угла треугольника и аналогичным утверждением о биссектрисе внешнего угла треугольника. **192.** В 30 раз. Указание. Воспользоваться теоремой Фалеса. **193.** Указание. Для доказательства одного из утверждений воспользоваться методом доказательства от противного. **194.** $\frac{1}{5}$. **195.** Указание. Пусть точка M — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Сначала доказать, что $S_{AMB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. **196.** а) $8S_1S_2S_3$. б) $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$. **197.** $2(S_1 + S_2)$. **198.** Указание. Воспользоваться утверждениями задач 71 в), 71 з) и 75 д). **199.** Указание. Сначала доказать, что высота треугольника ABC, проведённая к стороне AB, равна $\frac{ab}{2R}$, где $a = BC$, $b = AC$, R — радиус описанной около треугольника окружности. **200.** Указание. Сначала доказать, что площадь параллелограмма $MBCN$ равна сумме площадей треугольников ABC и BCD. **201.** $8a^2 \sin\alpha \cos^3\alpha$. **202.** Указание. Сначала доказать, что $S_{AEF} = S_{BCF}$ и $S_{DEF} = S_{CDF}$. **203.** Указание. Провести отрезки AQ, MP и NC. **204.** Указание. Сначала доказать, что $S_{ANB} = S_{ADM} + S_{BCM}$. **205.** Указание. Воспользоваться подобием треугольников MBC и NCD. **206.** Указание. Разрезать четырёхугольник на два треугольника, один из треугольников перевернуть и приложить к другому треугольнику. **207.** Указание. Сначала доказать, что радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями a и b, равен $\frac{ab}{a+b}$. **208.** $2S$. Указание. Рассмотреть центральное подобие, центром которого является данная точка. **209.** $\frac{2}{9}S$. Указание. Рассмотреть центральное подобие, центром которого является точка пересечения диагоналей данного четырёхугольника. **210.** Указание. Применяя теорему косинусов к двум треугольникам, на которые четырёхугольник разделяется диагональю, сначала доказать, что синус угла, заключённого между сторонами a и b, равен $\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}$. **211.** $2\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\beta}$. Указание. Сначала доказать, что $OB \perp MN$. **212.** Указание. Сначала доказать, что при увеличении числа n периметры P_n увеличиваются, а периметры Q_n уменьшаются. **213.** Указание. Выразить сумму площадей двух сегментов, ограниченных дугой ACB катетами, через катеты. **214.** π. **215.** Указание. Пусть O — центр данного круга, K — точка пересечения диаметра CD и дуги AB окружности с центром D. Сначала доказать, что площадь криволинейного четырёхугольника $CQNK$ равна площади треугольника DOQ_1. **216.** Указание. Сначала выразить диагонали искомого ромба через сторону данного квадрата и данные отрезки. **217.** Указание. Воспользоваться задачей 187. **218.** Указание. Сначала выразить радиусы искомых окружностей через радиус данного круга. **219.** Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 218. **220.** Не могут. **222.** Указание. Рассмотреть развёртку тетраэдра (рис. 113). **223.** в) Указание. Плоскость сечения проходит через середины шести рёбер куба. **224.** Не может. **225.** $\frac{\sqrt{13}}{2}a$. Указание. Рассмотреть развёртку куба (см. рис. 114). **226.** Указание. Рассмотреть две пирамиды, основания которых — основания призмы, а вершинами является выбранная точка. **227.** Указание. Представить объём правильного тетраэдра в виде суммы объёмов четырёх пирамид, основаниями которых служат грани тетраэдра, а вершинами служит отмеченная точка. **228.** Указание. На каждой грани отметьте две противоположные вершины.

229. 1 : 3 : 3 : 5. **230.** 75°. **231.** $\frac{\pi a}{12} \cdot (3a^2 + 8h^2)$.

Предметный указатель

Список литературы

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. В 2 ч. Ч. 1. Планиметрия / Ж. Адамар. — М.: Учпедгиз, 1957.
2. Бутузов В. Ф. Планиметрия: пособие для углубл. изуч. математики / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк и др.; под ред. В. А. Садовничего. — М.: Физматлит, 2005.
3. Гельфанд И. М. Метод координат / И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. — М.: МЦНМО, 2009.
4. Декарт Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта / Р. Декарт. — М.: Либроком, 2010.
5. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. В 2 т. Т. 2. Геометрия / Ф. Клейн. — М.: Наука, 1987.
6. Коксетер Г. С. М. Введение в геометрию / Г. С. М. Коксетер. — М.: Наука, 1966.
7. Коксетер Г. С. М. Новые встречи с геометрией / Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер. — М.: Наука, 1978.
8. Архимед. О квадратуре круга / Архимед, Х. Гюйгенс, И. Г. Ламберт и др.; пер. с нем. — 3-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2010.
9. Александров П. С. Энциклопедия элементарной математики. В 5 кн. Кн. 4. Геометрия / П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. — М.: Физматгиз, 1963.
10. Александров П. С. Энциклопедия элементарной математики. В 5 кн. Кн. 5. Геометрия / П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. — М.: Наука, 1966.
11. Яглом И. М. Геометрические преобразования. В 2 т. Т 1. Движения и преобразования подобия / И. М. Яглом. — М.: ГИТТЛ, 1955.

Интернет-ресурсы

1. http://ilib.mirror1.mccme.ru/
2. http://window.edu.ru/window/library
3. http://www.problems.ru/
4. http://kvant.mirror1.mccme.ru/
5. http://www.etudes.ru/
6. http://www.koob.ru/gardner/

Интернет-ресурсы на английском языке

1. http://mathworld.wolfram.com/
2. http://forumgeom.fau.edu/

Оглавление

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Бутузов Валентин Фёдорович
Кадомцев Сергей Борисович
Прасолов Виктор Васильевич

ГЕОМЕТРИЯ

9 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *П. А. Бессарабова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Художники *О. П. Богомолова, И. А. Андреев*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректор *Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93 — 953000.
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 22.11.11.
Формат $70 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура FreeSetC. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 8,26 + форз. 0,5. Тираж 7000 экз. Заказ № 30161 (П - Гз).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Открытое акционерное общество «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

МГУ - ШКОЛЕ

Учебно-методический комплект авторов В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, В.В. Прасолова по геометрии для 7— 9 классов содержит:

Учебники

под редакцией В.А. Садовничего

Дидактические материалы

Поурочные разработки

Геометрия. Сборник рабочих программ. 7 — 9 классы

ISBN 978-5-09-019211-8

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО